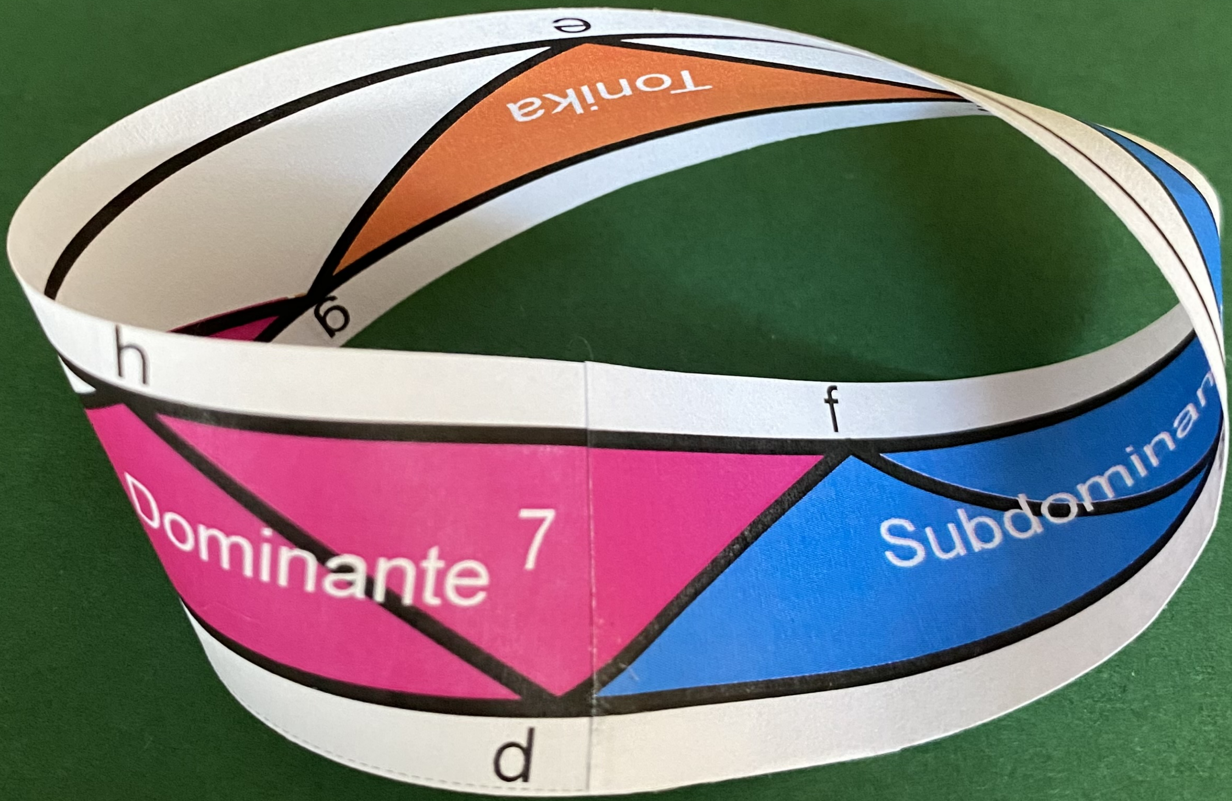
UNSER HARMONISCHES TONSYSTEM



Musik-Mathematik kurz gefasst

Heft 1
Wilfried Neumaier
September 2025

Die Musikmathematik begann in der Pythagoras-Schule. In ihr wurden Intervalle durch Proportionen von Saitenlängen am Monochord bestimmt. Harmonische Hauptintervalle waren die **Oktave** und **Quinte** mit den einfachsten Proportionen:

(1) O ≔ die Oktave ≔ Intervall(2:1)
Q ≔ die Quinte ≔ Intervall(3:2)

Man addiert Intervalle, multipliziert aber deren Proportionen; daher lassen sich die Proportionen addierter, subtrahierter oder vervielfachter Intervalle berechnen mit folgenden Regeln, die schon Philolaos um 500 v. Chr. anwandte:

(2) Proportion(x+y) = Proportion(x)·Proportion(y)
Proportion(x−y) = Proportion(x):Proportion(y)
Proportion(nx) = Proportion(x)^n
Proportion(Intervall(p)) = p

die Quarte ≔ Oktave−Quinte	Proportion(Quarte)=4:3
Ganzton ≔ Ton ≔ Quinte−Quarte	Proportion(Ton)=9:8
diatonischer Halbton ≔ Quinte−3Ton	Proportion(diat. Halbton)=256:243

Eine interessante alternative Musik-Mathematik unabhängig von der Physik schuf Aristoxenos in seinen *Harmonischen Elementen* um 330 v.Chr. Er sah **Intervalle** als musikalische Größen an: als reelle Vielfache der Oktave. Seine experimentelle Intervallmessung mit dem Gehör ergab: Quinte=$^7/_{12}$O, Ton=$^1/_6$O und Halbton=$^1/_{12}$O. Eine Generation später verteidigte Euklid das pythagoreische System und bewies mit Sätzen seiner *Elemente* die Unvereinbarkeit zum System des Aristoxenos. Er postulierte auch einen Zusammenhang zwischen Frequenzverhältnissen und Intervall-Proportionen. Dieser war aber noch lange Zeit keine Erfahrungstatsache. Erst im Jahr 1638 konnte Galileo Galilei diesen Zusammenhang experimentell verifizieren:

(3) Frequenz(x):Frequenz(y) = Proportion(x–y)

Erst nach der Erfindung der reellen Zahlen und der Logarithmen konnte eine Übersetzung der pythagoreischen Denkweise in die von Aristoxenos allgemein definiert werden, dass daraus die antiken Umrechnungsregeln (2) folgen:

(4) Proportion(rO) ≔ 2^r	reelle Zahlen 1585
Intervall(p) ≔ ($\log_2 p$)O	nach Huygens 1691

Negative Vielfache der Oktave ergeben Intervalle in negativer Richtung mit umgekehrter Proportion. Man bezeichnet sie mit negativem Vorzeichen oder mit einer Vorsilbe als Unter-Intervalle:

(5) Unter-x ≔ −x
Intervall(x:y) = −Intervall(y:x)

Oktave und Quinte erzeugen innerhalb der Intervalle das **Quintsystem**, das eingebettet werden kann in einen rationalen Vektorraum mit der Basis (O,Q), in dem man rechnet wie in der linearen Algebra. Euklids diatonische Tonleiter ist ein Teilsystem, modern gesprochen eine A-Moll-Tonleiter über zwei Oktaven, deren Töne um 1000 mit Tonbuchstaben A B C D E F G a b c d e f g $\overset{a}{a}$ bezeichnet wurden. Diese Notation wurde später etwas modifiziert. Man rückte im deutschen Sprachraum vom Alphabet ab, ersetzte b durch h und ging vom Ton c aus; deshalb liegt die **diatonische Dur-Tonleiter** der heutigen Tonbuchstaben-Definition zugrunde:

(6) c ≔ 0 d ≔ c+Ton e ≔ d+Ton f ≔ c+Quarte
g ≔ c+Q a ≔ g+Ton h ≔ a+Ton c' ≔ c+O
Oktavierung(x) ≔ $\{x+z\mathrm{O} \mid z$ ist ganzzahlig$\}$ x' ≔ x+O x^z ≔ $x+z\mathrm{O}$
Tonbuchstabe ≔ Oktavierung von c, d, e, f, g, a oder h

Diese Tonleiter heißt diatonisch, weil sie die Quarte von c bis f und von g bis c' melodisch auffüllt durch zwei Töne. Als Restintervall entstehen leittönig wirkende diatonische Halbtöne, wie sich aus den Differenzen ergibt:

(7) c d e f g a h c'
Ton Ton diat. Halbton Ton Ton Ton diat. Halbton

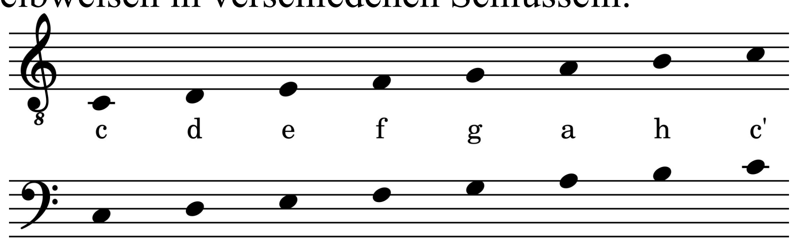
In der Definition (6) geben Intervalle relativ zum Nullpunkt c die **Tonhöhe** an. Sie wird heute akustisch normiert durch die Frequenz, die sich mit (3) für beliebige Tonhöhen errechnet aus: Frequenz(a')=440Hz. Tonbuchstaben ohne hochgestellte Oktavlage repräsentieren **Tonigkeiten**, nämlich Klassen ähnlich klingender Töne verschiedener Oktavlage, also nichts anderes als die Oktavierung:

(8) Tonigkeit(x) ≔ Oktavierung(x)

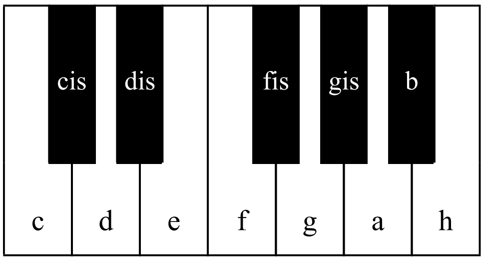
Um 1030 führte Guido von Arezzo das **Liniensystem** ein: Er ordnete den Linien und Zwischenräumen der Reihe nach Tonbuchstaben zu mit zunehmender Tonhöhe von unten nach oben. Die Zahl der Linien pro System lag nicht fest. Heute nimmt man fünf Linien und ergänzt bei Bedarf Hilfslinien oben oder unten. Prinzipiell ist es also unendlich. Die Tonhöhe wird für eine Linie vorgegeben durch einen Tonbuchstaben, den sogenannten **Schlüssel**, aus dem sich die übrigen Tonhöhen des Liniensystems ergeben. Man benutzte primär F und c als Schlüssel und später auch g. Sie werden hier in heutiger stilisierter Form mit markierter Notenlinie definiert:

(9)  ≔ g'  ≔ c'  ≔ f $\overset{8}{S}$ ≔ S+O $\underset{8}{S}$ ≔ S–O
Violinschlüssel Alt-/Tenorschlüssel Bassschlüssel oktavierte Schlüssel

Die diatonische Dur-Tonleiter hat somit im Liniensystem mehrere gleichwertige Schreibweisen in verschiedenen Schlüsseln:

(10) 

Seit dem Spätmittelalter ist diese Tonleiter auf den weißen Tasten der Klaviatur realisiert. Fünf schwarze Tasten sind chromatisch alteriert; das zeigen Nachsilben am Tonbuchstaben oder Vorzeichen vor einer Note oder Notenlinie an:

(11) 

♯ ≔ chromatischer Halbton ≔ 7Q–4O

$\sharp t$ ≔ $t$is ≔ t+♯ $\qquad$ $\flat t$ ≔ $t$as ≔ $t$es ≔ t−♯

b ≔ ♭h $\qquad$ es ≔ ♭e $\qquad$ as ≔ ♭a

$\natural t$ ≔ t $\qquad$ bb ≔ ♭♭h $\qquad$ 𝄪t ≔ ♯♯t

chromatisch alteriertes t ≔ $\{t+z\sharp | z$ ist ganzzahlig$\}$

Notenlinie(x) ≔ Der Tonbuchstabe t, bei dem x ein chromatisch alteriertes t ist

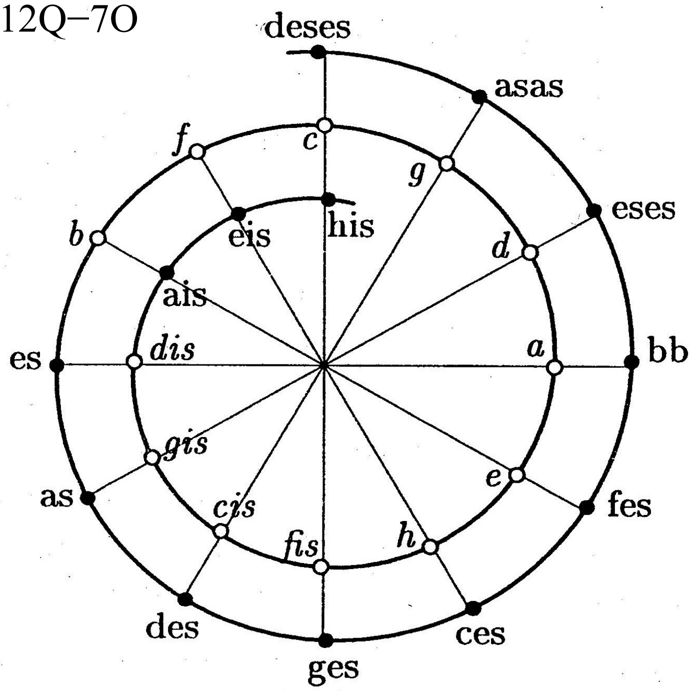
Vorzeichen(x) ≔ x–Notenlinie(x)

Chromatisch alterierte Tonbuchstaben erzeugen den **Quintenzirkel**. Dieser repräsentiert die Tonigkeiten des Quintsystems, ist also ein Repräsentantensystem für das Quintsystem modulo O. Der Quintenzirkel ist unendlich, da die Quinte und die Oktave linear unabhängig sind, was schon Euklid mit Sätzen seiner *Elemente* bewies. Der Quintenzirkel schließt sich deshalb nie. Nach zwölf Quinten unterscheiden sich die Töne dis und es um das sogenannte pythagoreische Komma, um etwa $^1/_9$Ton. Das veranschaulicht ein graphisch dargestellter Quintenzirkel mit Polarkoordinaten (7O=360° und Q≈30,1°), in dem die zwölf Klaviertasten als weiße Punkte eingetragen sind:

(12) κ ≔ pythagoreisches Komma ≔ 12Q−7O

κ = dis−es = c−deses = his−c'

κ ≈ $^1/_9$Ton



Weil der Quintenzirkel nicht geschlossen ist, kann man auf einem Klavier mit rein gestimmten Quinten nicht beliebig transponieren: Es ergibt sich bei b−dis eine zu große Pseudoquinte mit einem deutlich hörbaren Fehler von $^1/_9$Ton. In der Renaissance gestattete nur die Laute ein beliebiges Transponieren. Lanfranco, der die Lautenstimmung 1533 erstmals beschrieb, lobte daher dieses Instrument über alles. Die Bünde auf dem Griffbrett der Laute erzwingen nämlich eine **gleichmäßige zwölfstufige Stimmung** mit minimal verkleinerter Quinte, die Aristoxenos einst nutzte: $\zeta(\mathrm{Q}) = {}^{7}/_{12}\mathrm{O} = \mathrm{Q} - {}^{1}/_{12}\kappa \approx \mathrm{Q} - {}^{1}/_{100}\mathrm{Ton}$. Weil in diesem System das pythagoreische Komma verschwindet, ist das beliebige Transponieren gesichert. Der geschlossene temperierte Quintenzirkel wird durch den Halbton $\zeta(\sharp) = \zeta(\text{f-e}) = {}^{1}/_{12}\mathrm{O}$ erzeugt und hat daher zwölf Tonigkeiten. Diese Stimmung war aber auf Tasteninstrumenten noch lange nicht üblich, obwohl die zwölf Tonigkeiten genau zur Klaviatur (11) gepasst hätten.

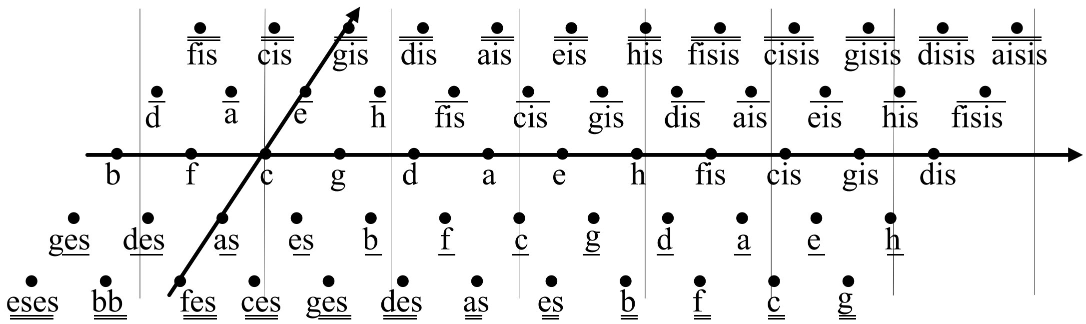
In der mehrstimmigen Musik des Spätmittelalters etablierten sich die Terzen als Konsonanzen in Dreiklängen. Man stellte fest, dass reine Dreiklangstöne im Verhältnis 6:5:4 stehen. Daher bestimmte Ramis de Pareja 1482 die **reine Terz** nicht mehr diatonisch, sondern über die Proportion 5:4. Sie erweitert das Quintsystem zum **Dreiklangsystem**, das in den dreidimensionalen rationalen Vektorraum mit der Basis (O,Q,T) eingebettet werden kann. Denn die reine Terz ist (nach Euklids Satz) linear unabhängig von der Quinte und Oktave und erzeugt deshalb eine neue Dimension. Die reine Terz deckt sich nämlich nicht mit der diatonischen Terz, sondern ist um das sogenannte syntonische Komma kleiner:

(13) $\mathrm{T} \coloneqq$ die reine Terz $\coloneqq$ Intervall(5:4)
$\sigma \coloneqq$ syntonisches Komma $\coloneqq 2\mathrm{Ton} - \mathrm{T}$
$\sigma = 4\mathrm{Q} - 2\mathrm{O} - \mathrm{T} \approx {}^{1}/_{9}\mathrm{Ton}$ Proportion(σ)=81:80

Dieses Mikrointervall erzeugt zusätzliche syntonisch alterierte Töne, die durch Striche über oder unter dem Tonnamen notiert werden, wobei der obere Strich die Tonhöhe erniedrigt und der untere Strich erhöht:

(14) $\underline{x} \coloneqq x+\sigma \qquad \overline{x} \coloneqq x-\sigma$

Die Tonigkeiten des Dreiklangsystems werden graphisch dargestellt im sogenannten **Tonnetz**; es hat als horizontale Achse den Quintenzirkel und eine Terz-Achse im Winkel von 56,6°, bei der die Projektion der Töne auf die Quint-Achse die Tonhöhe angibt bezüglich der Oktave, die in der Graphik durch feine senkrechte Striche markiert ist:

(15)


Seit dem Mittelalter orientiert sich die musikalische Terminologie an den Stufen der Notenlinien, nicht nur im Quintsystem, sondern auch im erweiterten Dreiklangsystem. Die Stufen repräsentieren jeweils alle alterierten diatonischen

Töne. Das **Stufensystem** ist somit das Dreiklangsystem modulo ♯,σ, ein mathematisch abstraktes Liniensystem. Dort kann man mit den Stufen rechnen wie mit Tonhöhen und Intervallen:

(16) Für Tonbuchstaben und Elemente x des Dreiklangsystems gilt:
alteriertes x ≔ Stufe(x) ≔ $\{x+y\sharp+z\sigma | y$ und z sind ganzzahlig$\}$

Stufe(x)+Stufe(y) ≔ Stufe($x+y$)	*Stufensumme*
–Stufe(x) ≔ Stufe(–x)	*inverse Stufen*
Stufe(x)–Stufe(y) ≔ Stufe(x–y)	*Stufendifferenz*
$n\cdot$Stufe(x) ≔ Stufe($n\cdot x$)	*vielfache Stufen*
$y\in$Stufe(x) ⇔ Stufe(y)=Stufe(x)	*stufengleich*

Tonhöhen und Intervalle werden benannt nach Stufen, die man mit lateinischen Ordinalzahlen durchzählt. Das Rechnen mit Stufen weicht ab vom Rechnen mit Ordinalzahlen: Musiker wissen, dass zwei Sekunden eine Terz ergeben und nicht etwa eine Quarte nach der Rechnung 2+2=4. Die Terminologie entstand, als das Rechnen mit Null noch unbekannt war; denn die Prime ist das Null-Intervall und die Sekunde die Stufen-Einheit. Die Ordinalzahlnamen sind deshalb um 1 zu groß, und man muss nach folgenden Regeln rechnen:

(17) Stufe n ≔ n-te Stufe ≔ (n–1)·Stufe(Ganzton) für Ordinalzahlen n

Prime ≔ erste Stufe	**Sekunde** ≔ zweite Stufe	**Terz** ≔ dritte Stufe
Quarte ≔ vierte Stufe	**Quinte** ≔ fünfte Stufe	**Sexte** ≔ sechste Stufe
Septime ≔ siebte Stufe	**Oktave** ≔ achte Stufe	**None** ≔ neunte Stufe
Dezime ≔ zehnte Stufe	**Undezime** ≔ elfte Stufe	**Duodezime** ≔ zwölfte Stufe

Sekunde = Stufe(Ganzton) = alterierter Ganzton
Stufe n = (n–1)·Sekunde Stufe n' ≔ Stufe n+7
Stufe –n ≔ –Stufe n = (1–n)·Sekunde

Spezielle Intervall-Repräsentanten werden dann durch Adjektive genauer differenziert. Die wichtigsten sind hier aufgelistet mit Angabe der Proportion und der Alteration des zugehörigen Tonbuchstabens:

(18)

reine Prime ≔ 0	1:1	c
übermäßige Prime ≔ ♯	2187:2048	cis
kleine Sekunde ≔ Q–3Ton	256:243	des
große Sekunde ≔ Ton	9:8	d
kleine Terz ≔ Q–T	6:5	$\underline{\text{es}}$
große Terz ≔ T	5:4	$\overline{\text{e}}$
reine Quarte ≔ O–Q	4:3	f
übermäßige Quarte ≔ O–Q+♯	729:512	fis
verminderte Quinte ≔ Q–♯	1024:729	ges
reine Quinte ≔ Q	3:2	g
kleine Sexte ≔ O–T	8:5	$\underline{\text{as}}$
große Sexte ≔ O–Q+T	5:3	$\overline{\text{a}}$
kleine Septime ≔ O–Ton	16:9	b
große Septime ≔ Q+T	15:8	$\overline{\text{h}}$

reine Oktave ≔ O	2:1	c'
kleine None ≔ O+Q–3Ton	512:243	des'
große None ≔ O+Ton	9:4	d'
kleine Dezime ≔ O+Q–T	12:5	$\underline{\text{es}}'$
große Dezime ≔ O+T	5:2	$\bar{\text{e}}'$
reine Undezime ≔ O–Q+T	8:3	f'
reine Duodezime ≔ O+Q	3:1	g'

übermäßige x ≔ x+♯ für reine x oder große x
verminderte x ≔ x–♯ für reine x oder kleine x

Diese Liste erfasst die wichtigsten Intervalle der mehrstimmigen Musik; fettgedruckt sind Konsonanzen mit einfachen Proportionen. Die Einstufung als Konsonanz war zwar historisch nicht ganz konstant, erreichte aber bei Gioseffo Zarlino, dem wichtigsten Musik-Mathematiker der Renaissance, einen für spätere Zeiten maßgeblichen Stand in seinem Werk *Le Istitutioni harmoniche* 1558. Er unterschied perfekte und imperfekte Konsonanzen und verglich perfekte mit schwarz-weiß und imperfekte mit farbig und nannte letztere mehr klangvoll:

(19) Als **perfekte Konsonanzen** oder **Hohlklänge** gelten die reine Oktave, die reine Quinte, die reine Quarte und deren Oktavierungen. Dazu gehören also:

reine Prime = reine Oktave–O	reine Unteroktave = reine Prime–O
reine Duodezime = reine Quinte+O	reine Unterquinte = reine Quarte–O
reine Undezime = reine Quarte+O	reine Unterquarte = reine Quinte–O

Als **imperfekte Konsonanzen** und **klangvoll** gelten die große und kleine Terz und die große und kleine Sexte und deren Oktavierungen. Dazu gehören also:

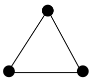
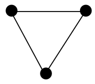
große Dezime = große Terz+O	kleine Dezime = kleine Terz+O
große Unterterz = kleine Sexte–O	kleine Unterterz = große Sexte–O
große Untersexte = kleine Terz–O	kleine Untersexte = große Terz–O

Akkorde aus lauter Konsonanzen klingen stets harmonisch. Wie man Dissonanzen in ein harmonisches Gefüge einbaut, ist eine Spezialwissenschaft, die historisch sehr differenziert ist und nicht allein vom Tonsystem abhängt. Sie lassen sich jedoch von Konsonanzen abgrenzen:

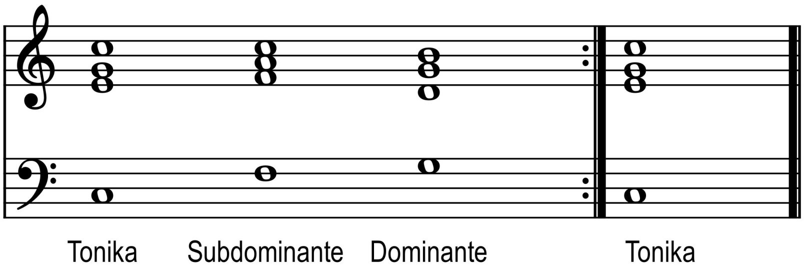
(20) Als **Dissonanzen** gelten alle Intervalle, die keine Konsonanzen sind.

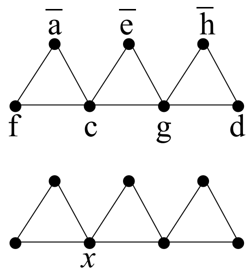
Dissonanzen sind somit: die große und kleine Sekunde, die große und kleine Septime, die große und kleine None, Oktavierungen und Unterintervalle von Dissonanzen, verminderte und übermäßige Intervalle, zu denen der Tritonus gehört, der in der diatonischen Tonleiter vorkommt und sich mit der übermäßigen Quarte deckt: O–Q+♯ = 3Ton = h–f.

Dissonanzen haben kompliziertere Proportionen, wie die Liste (18) deutlich zeigt. Sie wurden auch nicht harmonisch definiert, sondern melodisch als Intervalle der diatonischen Tonleiter, einem Teil des Quintsystems. Die Konsonanzen dagegen wurden im Dreiklangsystem definiert. Die Liste enthält drei reine Dur-Dreiklänge und zwei reine Moll-Dreiklänge. Sie erscheinen im Tonnetz (15) als Dreiecke; denn das Tonnetz ist ein Gitter aus lauter Dreiecken; ihre Spitze zeigt bei Dur-Dreiklängen nach oben und bei Moll-Dreiklängen nach unten:

(21) Durdreiklang:  Molldreiklang: 

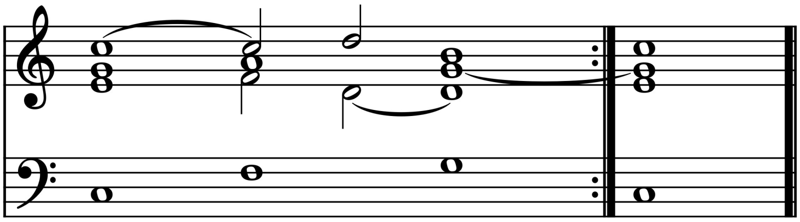
Besagte drei Dur-Dreiklänge in der Liste (18) sind die Hauptdreiklänge in C-Dur, die dort als Tonika, Subdominante und Dominante die **Haupt-Kadenz** bilden. Diese Hauptdreiklänge legen eine von der melodischen diatonischen Tonleiter abweichende harmonische Interpretation der Tonbuchstaben nahe: die rein gestimmte **harmonische Dur-Tonleiter**. Die Notenschrift gibt die reine Stimmung nicht wieder; im Tonnetz wird jedoch die typische Form der harmonischen Dur-Tonleiter in beliebigen Tonarten sichtbar:

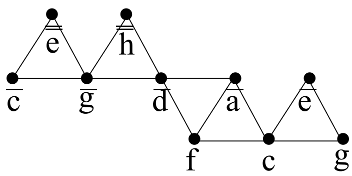
(22)




x-Dur-Hauptdreiklänge

Das Notenbild ignoriert die reine Stimmung; notiert sind dort syntonisch alterierte Terzen, die deutlich dissonanter klingen. Sie interessieren jedoch in der Praxis nicht. Das hat seinen Grund darin, dass das syntonische Komma ein Störintervall ist, das in der Praxis stets eliminiert wird. Der Grund ist leicht einzusehen. Beim Musizieren mit reinen Dreiklängen entstehen nämlich bei erweiterten Kadenzen mit Nebendreiklängen Mikro-Transpositionen um das syntonische Komma, die eine stabile Tonart verhindern. Am Beispiel einer einfachen harmlosen Kadenz in der Notenschrift zeigt eine Analyse mit reinen Dreiklängen im Tonnetz das Problem: Sie beginnt mit einem C-Dur-Dreiklang, endet aber mit einem hörbar tieferen C̄-Dur-Dreiklang, der bei jeder Wiederholung noch tiefer wird:

(23)




von rechts nach links zu lesen

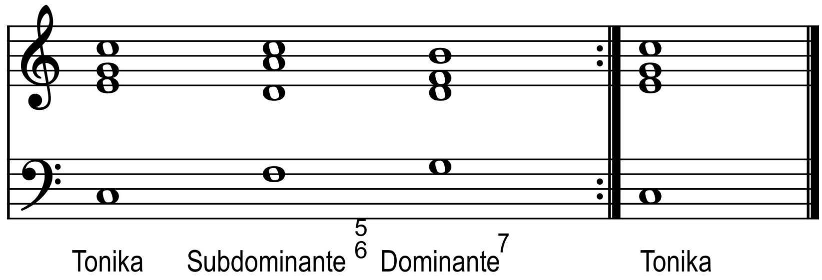
Man löste dieses Kadenzproblem durch **syntonische Stimmungen**, die man auch **Temperaturen** nennt. Bei ihnen wird die Quinte so verkleinert, dass das syntonische Komma verschwindet und Kadenzen stabil werden. Das leisten lineare Abbildungen ϑ mit $\vartheta(\mathrm{O})=\mathrm{O}$ und $\vartheta(\sigma)=0$. Sie bilden stets die Terz durch $\vartheta(\mathrm{T})=\vartheta(2\mathrm{Ton})=4\vartheta(\mathrm{Q})-2\mathrm{O}$ auf ein temperiertes Quintsystem ab, das zum Dreiklangsystem modulo σ isomorph ist. Die Notenschrift passt aus diesem Grund zu jedem syntonisch temperierten Tonsystem. Dort kann zur Darstellung der Tonigkeiten das zugehörige temperierte Tonnetz genutzt werden. In ihm fallen alle syntonischen Striche weg, so dass auf jeder Ebene alle Tonigkeiten vertreten sind und die Dreiklänge klar erkennbar sind.

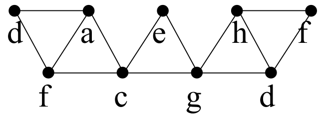
In der Renaissance war auf Tasteninstrumenten die **mitteltönige Stimmung** üblich. Pietro Aaron skizzierte sie 1523 und Zarlino präzisierte sie 1571: Sie ist terzrein $\mu(\mathrm{T})=\mathrm{T}$ und oktavrein $\mu(\mathrm{O})=\mathrm{O}$ und erfüllt $\mu(\sigma)=0$. Daraus errechnet man $\mu(\mathrm{Q})=\mathrm{Q}-{}^{1}/_{4}\sigma$ und zum Namen mitteltönig passend $\mu(\mathrm{Ton})={}^{1}/_{2}\mathrm{T}$. Der Fehler der Quinte $\mu(\mathrm{Q})\approx\mathrm{Q}-{}^{1}/_{36}\mathrm{Ton}$ ist gut erträglich, so dass Dur-Dreiklänge und Kadenzen schön klingen. Leider erzeugt sie einen offenen unendlichen Quintenzirkel und verhindert freies Transponieren: Bei der zwölften Quinte, dem sogenannten Wolf, ergibt sich ein inakzeptabler Fehler: $\mu(\text{b-dis})\approx\mathrm{Q}+{}^{7}/_{4}\sigma\approx\mathrm{Q}+{}^{1}/_{5}\mathrm{Ton}$. Der mitteltönige Quintenzirkel schließt sich aber nach 31 Quinten bis auf ${}^{1}/_{200}$Ton genau. Das erkannte Nicola Vicentino 1555. Seine Stimmung ist daher praktisch identisch mit der gleichmäßigen 31-stufigen Stimmung, die Huygens 1691 mit Logarithmen berechnete. Vicentino ließ auch mitteltönig gestimmte 31-tönige Archicembali bauen. Sie waren aber für die Praxis zu kompliziert. Darum blieb man auf zwölftastigen Instrumenten bei der mitteltönigen Stimmung und nahm das beschränkte Transponieren in Kauf.

Das änderte sich erst im Spätbarock, als man im Orgelbau diverse zwölfstufige **wohltemperierte Stimmungen** erprobte. Andreas Werckmeister beschrieb 1691 eine ungleichmäßige Temperatur mit vier mitteltönigen Quinten und sieben reinen Quinten, so dass sich wegen $\sigma\approx{}^{1}/_{9}\mathrm{Ton}\approx\kappa$ der Quintenzirkel mit einem Fehler von nur ${}^{1}/_{100}$Ton schließt. Das ergibt eine beinahe mitteltönige C-Dur-Tonleiter mit allmählichem Übergang im Quintenzirkel zur pythagoreischen Cis-Dur-Tonleiter. Stabile Tonarten und freies Transponieren waren gesichert, da jede zwölfstufige Stimmung das syntonische und das pythagoreische Komma eliminiert. 1698 stufte Werckmeister auch die gleichmäßige zwölfstufige Stimmung mit $\zeta(\mathrm{O})=\mathrm{O}$, $\zeta(\mathrm{Q})={}^{7}/_{12}\mathrm{O}$, $\zeta(\mathrm{T})={}^{4}/_{12}\mathrm{O}\approx\mathrm{T}+{}^{1}/_{14}\mathrm{Ton}$ als wohltemperiert ein. Der Beiname ‚wohltemperiert' sagt also nichts darüber aus, ob man ungleichmäßig oder gleichmäßig stimmt. Bach übernahm diesen Namen im Titel seines Werks *Das Wohltemperierte Klavier*, in dem er das beliebige Transponieren mit zweimal 24 Präludien und Fugen in jeder Dur- und Molltonart demonstrierte. Im 18. Jahrhundert wurden alle älteren Stimmungen durch die gleichmäßige zwölfstufige Stimmung verdrängt. Die Terz klingt dort harmonischer als die scharfe diatonische Terz, bewahrt aber die leittönige Wirkung diatonischer Halbtöne.

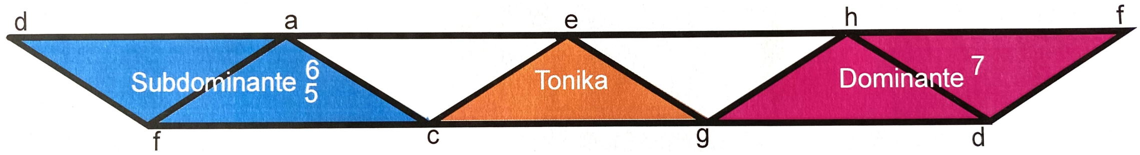
Diese Leittönigkeit nutzt die **barocke Kadenz** mit zwei typischen Akkorden: Rameaus sixte ajouté vereinigt die Subdominante mit dem parallelen Molldreiklang, und der Dominantseptakkord vereinigt die Dominante mit dem verminderten Dreiklang, dessen Leitton h aufs c der Tonika zielt und dessen Leitton f abwärts aufs e der Tonika zielt. Im Tonnetz zum Stufensystem (modulo O,♯,σ) erscheinen beide Akkorde als Parallelogramme rechts und links neben der Tonika. In einem farbigen Band sind die Akkorde der barocken Kadenz und ihre symmetrische Anordnung deutlicher zu erkennen:

(24)





Barocke Kadenz
im Tonnetz zum Stufensystem



Die Wiederholung dieser Kadenz verdrillt das Band und verknüpft es an den beiden gemeinsamen Tönen der Parallelogramme. Es entsteht eine interessante symmetrische Struktur: ein sogenanntes Möbiusband, das der Titel abbildet. Auf diesem Möbiusband läuft die unendliche Kadenz im Uhrzeigersinn ab.

Die leittönige Harmonik entwickelte sich immer weiter, besonders stark in der romantischen Musik. Dasselbe gilt auch für die Modulationstechnik: In ihr wurde die leittönige Chromatik voll ausgeschöpft. Sie wurde durch die Verwendung enharmonischer Verwechslungen noch kühner. Enharmonische Modulationen hätten sich ohne wohltemperierte Stimmung nie entwickeln können. Über sie erreicht man schnell entfernte Tonarten. Man nutzt dabei Elemente des Quintsystems modulo κ, das isomorph zum temperierten zwölftönigen Tonsystem mit eliminiertem κ ist:

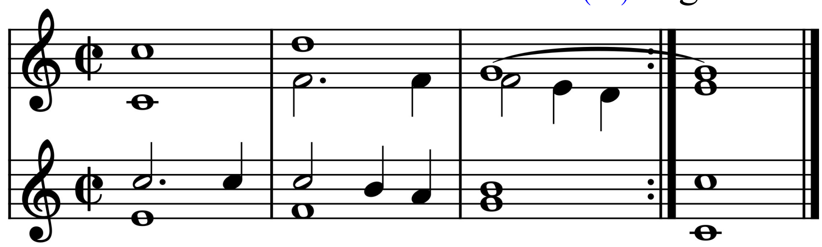
(25) enharmonische Verwechslung$(x) \coloneqq \{x+z\kappa \mid z$ ist ganzzahlig$\}$

Unser harmonisches Tonsystem ist damit mathematisch präzisiert. Es ist die Hauptdimension im Tonraum, den Musiker nutzen. Wer sich für die historischen Wurzeln und Entwicklungen dieser Musik-Mathematik interessiert und Genaueres wissen will, findet Literatur dazu, die teils downloadbar ist, im Verzeichnis auf der letzten Seite.

Die zweite grundlegende musikalische Dimension ist die Zeit. Sie betrifft zeitliche musikalische Strukturen mit Rhythmen und Takten. Sie ist unabhängig vom Tonsystem und wird hier deshalb auch nicht behandelt. In der historisch gewachsenen Form ist sie allen Musikern bestens bekannt. Denn sie arbeiten gewöhnlich in der Kombination beider Dimensionen, im Notensystem, das die Kadenzbeispiele nutzen. Es wird mathematisch genauer dargestellt im zweiten Heft dieser Serie: UNSER NOTEN- UND TAKTSYSTEM.

Beim Komponieren setzen Musiker ihre Fantasie ein und gestalten fantastische Musikstücke im definierten Tonraum. Sie nutzen auch mathematisch-musikalische Symmetrien in diesem Tonraum: Wiederholungen, Transpositionen, Umkehrungen, Vergrößerungen und Verkleinerungen. Das geschieht besonders intensiv in der Kanontechnik. Ihre Geschichte und ihre aktuelle komplexe Ausgestaltung vermittelt das Heft KANONKUNST. Dazu ein eigenes Beispiel, dem eine schlichte Variation der barocken Kadenz (24) zugrunde liegt:

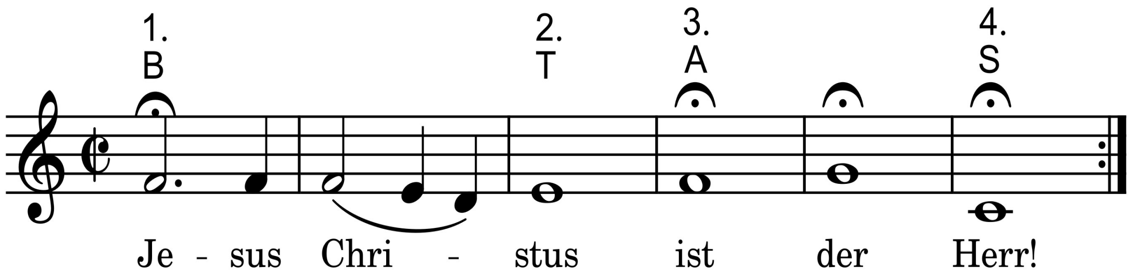
(26)



Die Kadenz ist komponiert in der kontrapunktischen Technik der Renaissance, die der Musik-Mathematiker Zarlino 1558 der Nachwelt vermittelte. Das dritte Heft KONTRAPUNKT ODER KOMPOSITION präzisiert sie. Die Kadenz erfüllt die dort gegebene Kontrapunkt-Definition und verknüpft – wie einst Zarlino – Kontrapunkt und Kanontechnik. Denn in ihr verbirgt sich ein komplexer Fugenkanon:

(27)

Als Kanon im ursprünglichen Sinn, nämlich als Abbildungsvorschrift über einer Melodie, aus der das Musikstück abgeleitet wird, lautet diese musikalische Miniatur für vierstimmigen Chor so:



Phil 2,11

Literatur

[1] Neumaier, W.: *Was ist ein Tonsystem? Eine historisch-systematische Theorie der abendländischen Tonsysteme, gegründet auf die antiken Theoretiker Aristoxenos, Eukleides und Ptolemaios, dargestellt mit Mitteln der modernen Algebra*, Frankfurt am Main, Bern, New York, 1986.

[2] Neumaier, W.: *Tonsysteme - ein interessantes Kapitel der Musik-Mathematik-Geschichte*, in: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 22, 5-26 (2003).

[3] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024.

[4] Neumaier, W.: *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025.

[5] Neumaier, W.: *Kontrapunkt oder Komposition*, 2025.

Download von [2][3][4][5]: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft

Historische Quellen

Aaron, Pietro, T*hoscanello de musica*, Venedig 1523, II, Kap. 41.
dazu: [1]220 und [3]17

Aristoxenos: *Harmonische Elemente*, um 330 v.Chr.
dazu: [1]63-110 und [3]8-12

Euklid, *sectio canonis*, ed. Menge, Hermann in: Euclidis opera omnia 8, 1916, 158-183.
dazu: [1]112+127f+135 und [3]12f+15

Galilei, Galileo, *Discorsi e dimostrationi matheamtiche intorno a due nuove scienze*, 1638.
dazu: [1]183

Guido von Arezzo, *Aliae regulae*, in: Gerbert Scriptores II, 34.
dazu: [2]15

Huygens, Christian, *Novus cyclus harmonicus*, in: opera varia, Band 2, 745-754.
dazu: [1]179 und [3]18+21

Lanfranco, Giovanni, *Le scintelle de musica*, Brescia 1533, 132ff.
dazu: [1]182+222f und [3]17f

Philolaos, Fragment 6, in H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Band I, 1961, 408-410.
dazu: [2]6ff

Ramis de Pareja: *Musica practica*, Bologna 1482
dazu: [1]215ff und [3]16

Vicentino, Nicola: *L' antica musica ridotta alla moderna pratica*, Rom 1555, Buch V, Kap.5
dazu: [1]224 und [3]21

Werckmeister, Andreas: *Musicalische Temperatur*, Quedlinburg 1691, XXI, 57f.
Kurtzer Unterricht, wie man ein Clavier stimmen und wohl temperiren könne, Anhang in: Werckmeister: *Die notwendigen Anmerkungen und Regeln wie der Bassus continuus oder der Generalbaß wol könne tractieret werden,* Aschersleben 1698
dazu: [1]182f+223ff und [3]18+24

Zarlino, Gioseffo: *Dimostrationi harmoniche*, Venedig 1571, III, Proposta 10f
dazu: [1]187f+221f und [3]18
Le Istitutioni harmoniche, Venedig 1558, Pars III, Kap. 6ff, 17ff, 22f

***

Update Februar 2026