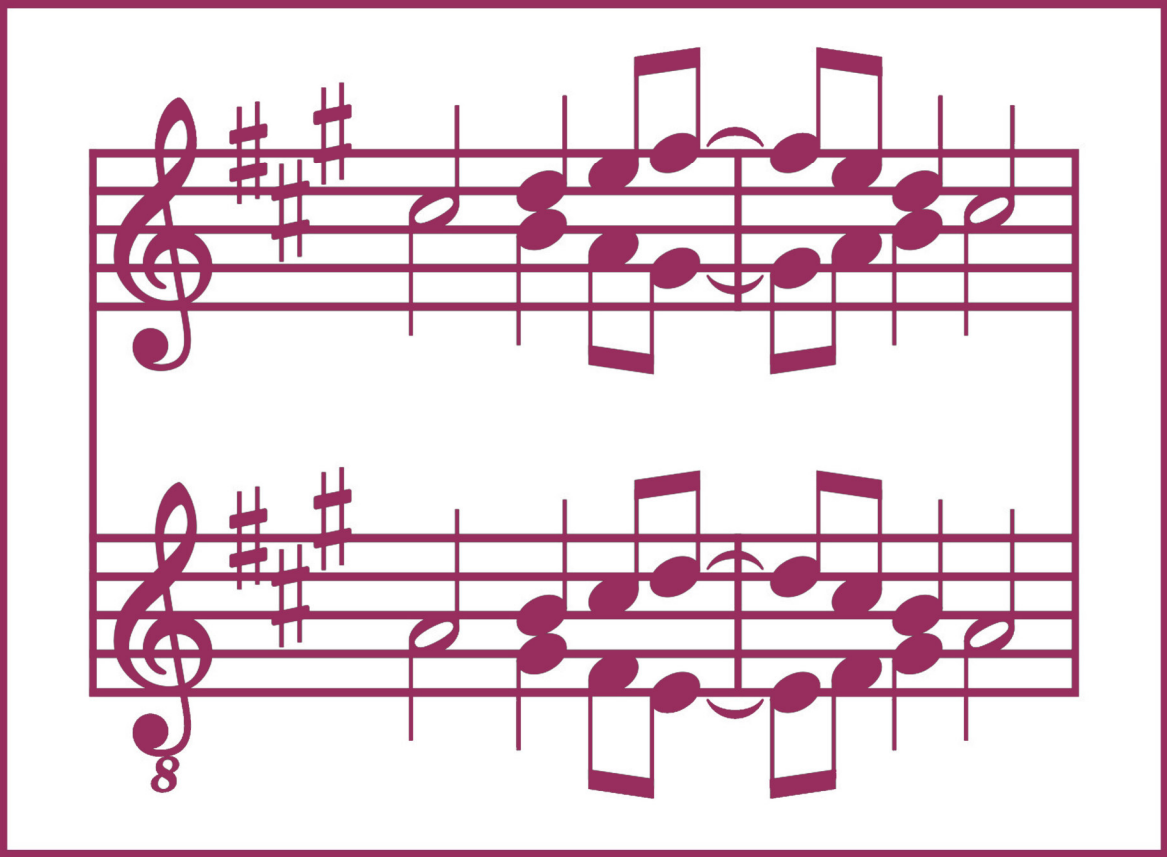
DOPPELTER KONTRAPUNKT

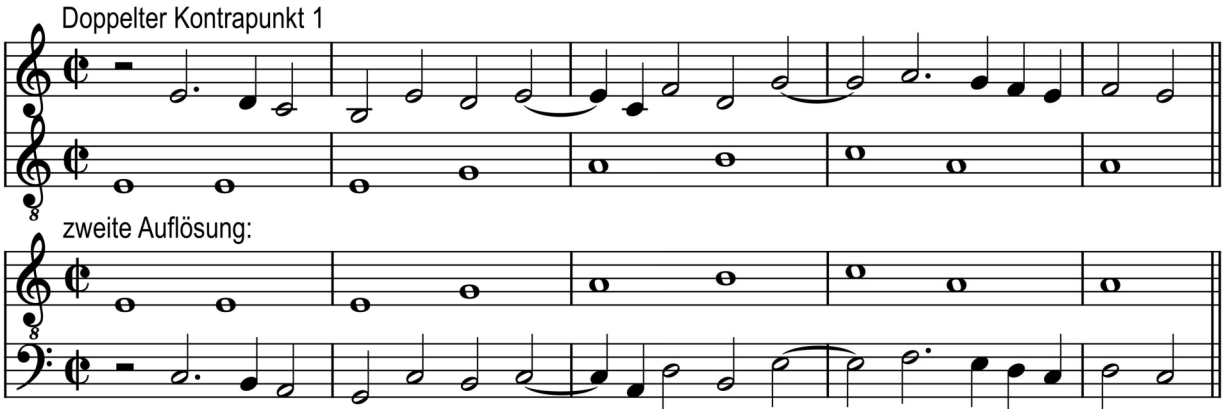


Heft 4
Wilfried Neumaier
Februar 2026

Musik-Mathematik
kurz gefasst

Im Heft KONTRAPUNKT ODER KOMPOSITION [*Kp*], das die Mathematik des Kontrapunkts präzisiert, ist eine Spezialtechnik noch ausgeklammert: der doppelte Kontrapunkt. Erstmals behandelte **Nicola Vicentino** (1511-1576) dieses Thema in seinem Buch *L'antica musica ridotta alla moderna prattica* 1555 [*V*]. Er erklärte den doppelten Kontrapunkt als doppelte Komposition, und zwar als eine Art Kanon (fuga), der kein eigentlicher Kanon ist, sich aber manchmal als Kanon zwischen Ober- und Unterstimme zu einem Cantus firmus einpassen lässt.[V34] Das heißt: Wie bei einem Kanon wird aus einer Komposition eine zweite abgeleitet, entweder als separate Komposition oder vereinigt mit der ersten als Kanon. Seine Beispiele zeigen, dass er den doppelten Kontrapunkt nicht bloß als Stimmtauschtechnik verstand, wie es später üblich wurde. Diese Technik behandelte er natürlich auch, und zwar gleich im ersten Beispiel; es ist ein **doppelter Kontrapunkt der Dezime**, bei dem er die Oberstimme um eine Dezime verschob unter den Cantus firmus in ganzen Noten:[V34 Notenbeispiel 1]

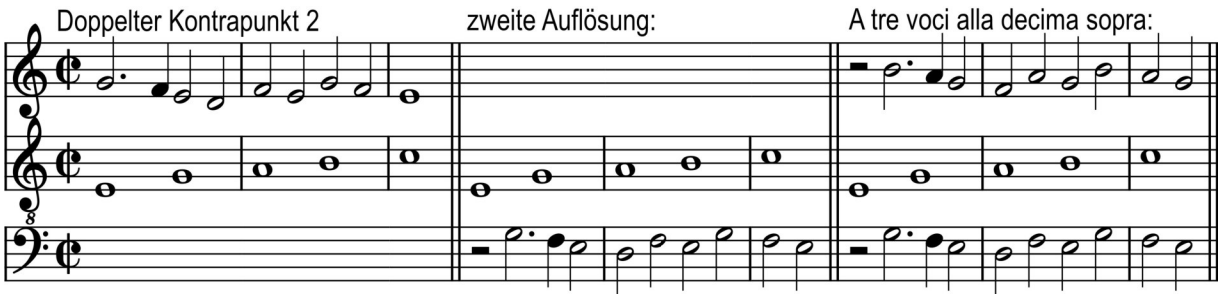
(1)



Für doppelte Kontrapunkte der Dezime gilt sein Verbot von Terz- und Sextparallelen, da sie verbotene Oktav- oder Quintparallelen erzeugen können.

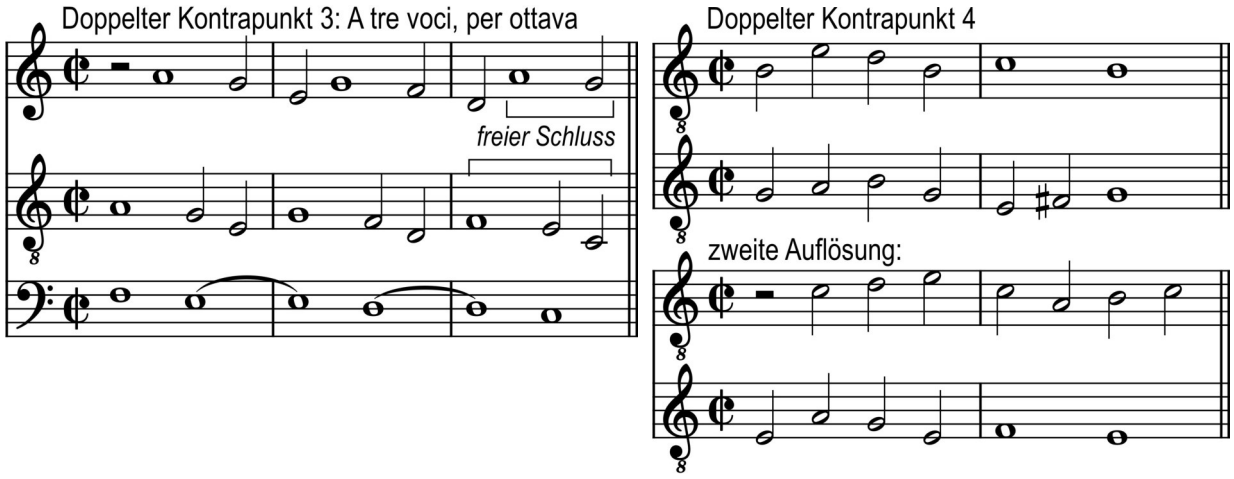
Sein zweites Beispiel geht bereits über die Stimmtauschtechnik hinaus: Es ist ein **doppelter Kontrapunkt mit Zeitversetzung** nach einer Pause. Er notierte nur eine zweistimmige Auflösung, deutete aber eine dreistimmige Auflösung verbal an durch eine Kanonvorschrift, die wohl einen Dezimparallelkanon zum Cantus firmus meint:[V34 Notenbeispiel 2]

(2)



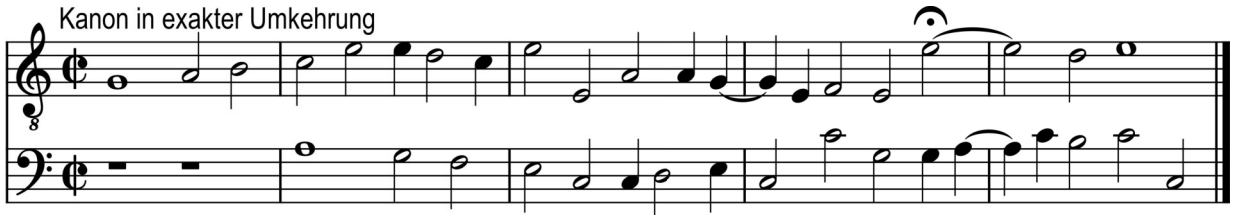
Er fügte noch zwei weitere doppelte Kontrapunkte mit Zeitversetzung hinzu, einen gleich dreistimmig kombiniert zum Oktavkanon (mit freiem Schluss) über einem Cantus firmus in langen Noten:[V34 Notenbeispiel 3+4]

(3)



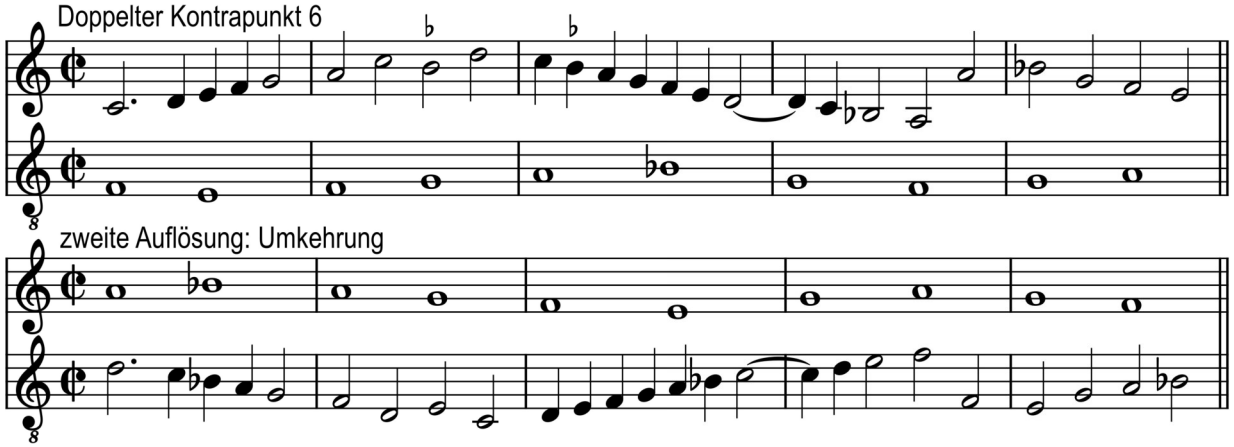
Vicentino hatte kurz vorher ein Beispiel für einen Umkehrungskanon gegeben, bei dem er die Melodie exakt an einer Tonhöhenachse spiegelte, so dass alle Intervalle nur die Richtung wechseln:[V32 Notenbeispiel 3]

(4)



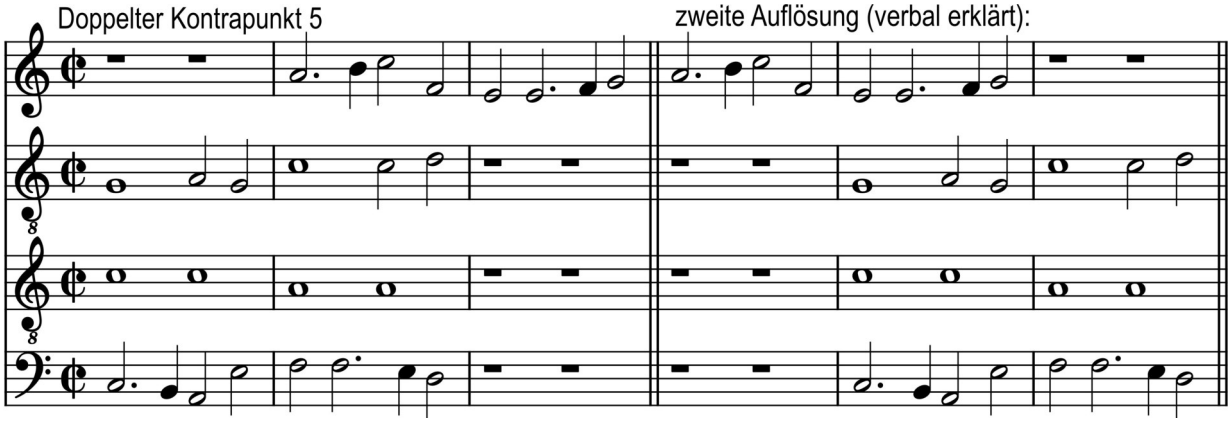
Im nächsten Kapitel zum doppelten Kontrapunkt nutzte er auch Umkehrungen mit alterierten Tönen, die nicht mehr exakt gespiegelt sind. Das belegt sein **doppelter Kontrapunkt der Umkehrung**, bei dem er an den mit ♭ markierten Noten von der exakten Umkehrung abwich:[V35 Notenbeispiel 2]

(5)



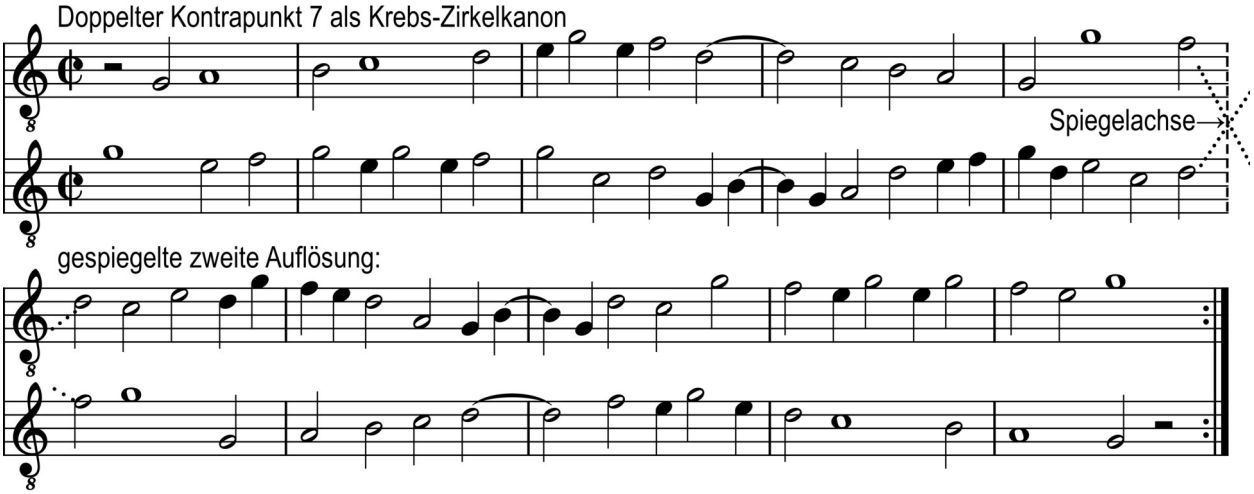
Eine alterierte Umkehrung benutzte er auch in einem vierstimmigen Kontrapunkt, bei dem er zur freien Tenor- und Altstimme einen Umkehrungskanon komponierte. Er beschränkte sich hierbei (wie meist) auf eine kurze Skizze, die einem Schüler zeigen soll, wie das Prinzip funktioniert. Es ging ihm nämlich um den interessanten Effekt, den eine Umkehrung des Umkehrungskanons erzeugt: Es entsteht ein zeitversetzter Kanon als zweite Auflösung des doppelten Kontrapunkts. Beide Kanons überlagern sich zu einem Zirkelkanon, wenn die Pausentakte in der Mitte gestrichen werden:[V35 Notenbeispiel 1]

(6) Doppelter Kontrapunkt 5 — zweite Auflösung (verbal erklärt):



An eigenen Kanonkompositionen lag Vicentino nicht viel, weil die Kanonstruktur die volle Harmonie und schöne Melodie behindert und Kanons nur durch ihre kunstvolle Gestaltung bestechen.[V37] Nur eine Struktur reizte ihn zur expliziten Ausarbeitung: Er komponierte zuerst die Oberstimme bis zur Mitte, dann die Unterstimme bis zur Mitte, spiegelte dann die vertauschten Stimmen an der Mitte und verband sie zu einem Krebs-Zirkelkanon, den er einstimmig notierte; seine Kompositionsanweisung ergibt die zweistimmige Auflösung als **doppelter Kontrapunkt mit Spiegelung an einer Zeitachse**:[V37]

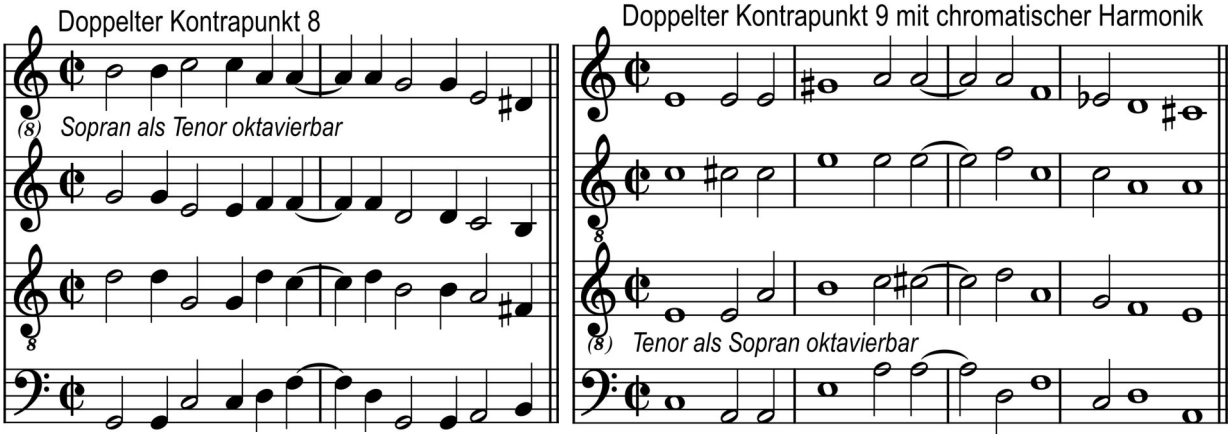
(7) Doppelter Kontrapunkt 7 als Krebs-Zirkelkanon



Als Kompositionsregel gab er an: Der Schüler darf weder einen dissonanten Vorhalt setzen noch eine dissonante Zwischennote noch punktierte Noten, die rückwärts Synkopen erzeugen.[V37] Sein Kanon hat daher gar keine Dissonanzen.

Abschließend behandelte er nur noch zwei praktische Beispiele, in denen ein **doppelter Kontrapunkt der Oktave** angewandt wird. Er nannte als Regel, keine Quinten zu setzen, denn sie erzeugen beim Oktavieren nach unten falsche Quarten zum Bass. Er ergänzte daher einen freien Bass, bei dem das Problem verschwindet: Im ersten Beispiel, das dem Mangel an hohen Sopran-Männerstimmen in der damaligen Chorpraxis abhelfen sollte, kann der Sopran als Tenor gesungen werden. Im zweiten Beispiel mit chromatischer Harmonik, die er erstmals propagierte, kann umgekehrt der Tenor als Sopran gesungen werden. Die Vertauschungen zeigen ad lib. oktavierte Violinschlüssel an:[V38+39]

(8)



Vicentino schrieb für Praktiker und deutete die formale Seite nur an, als er den doppelten Kontrapunkt als Art Kanon (fuga) bezeichnete. Er meinte die für den Kanon typische **Abbildungstechnik**, die auch beim doppelten Kontrapunkt stattfindet. Zuerst nannte er den Stimmtausch. Dieser nummeriert die Stimmen eines Satzes um durch eine Zahlenpermutation und ändert nur die Schicht als einziges Notenmerkmal:*N*(9)

(9) Ein **Stimmtausch** ist eine Schichtänderung s n-stimmiger Musikstücke mit Schicht($s(x)$)=π(Schicht(x)) für eine Permutation π der Zahlen 1 bis n und Noten x. Mit π=(π(1),..., π(n)) ergeben sich für n=3 folgende Fälle:

Permutation π	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,1,2)
Stimmtausch π(A B C)	A B C	A C B	B A C	C A B	B C A	C B A

Ein Stimmtausch allein ist musikalisch wirkungslos. Vicentino verknüpfte ihn stets mit anderen Abbildungen, bei denen sich die Tonlage der Stimmen verändert. Der Stimmtausch ordnet in der Regel die abgebildeten Stimmen der Tonlage nach von oben nach unten: Sopran, Alt, Tenor, Bass. Dabei stattfindende Tonhöhenänderungen werden mit einem **Intervalloperator**, der auf Töne wirkt und bei Pausen wirkungslos ist, präzise beschrieben:

(10) Für Noten x=[x_1,...,x_n] laut *N*(3) und Intervalle i wird definiert:
$x+i$ ≔ [x_1, x_2+i,...,x_n], falls x ein Ton mit Tonhöhe x_2 laut *N*(3) ist,
$x+i$ ≔ x, falls x eine Pause ist, und $x–i$ ≔ $x+(–x)$.
Offenbar gilt: $(x+i)+j=x+(i+j)$ — *assoziativer Operator*
$x+i+j=x+j+i$ — *kommutativer Operator*
Ferner gilt:[1] $(x+i)–(y+i) = x–y$
Tonhöhe($x+i$)=Tonhöhe(x)+i
$\mu(x+i)=\mu(x)$ für andere Notenmerkmale μ — *intervalltreuer Tonhöhenoperator*

[1] Mit Definitionen (10) und Intervalldefinitionen *Kp*(1) gilt mit Abkürzung Tx ≔ Tonhöhe(x): T($x+i$) = T[x_1, x_2+i,...,x_n] = x_2+i = T[x_1, x_2,...,x_n]+i = T$x+i$. Für Noten gilt $(x+i)–(y+i)$ = T$(x+i)$–T$(y+i)$ = T$x+i$–(T$y+i$) = Tx–Ty = $x–y$; für Pausen x gilt $(x+i)–(y+i) = x–(y+i) = 0 = x–y$, für Pausen y ebenso $(x+i)–(y+i) = (x+i)–y = 0 = x–y$.

Oktavtranspositionen wie in (8) sind Spezialfälle eines bereits definierten Abbildungstyps, die per Intervalloperator genauer bestimmt werden:

(11) Als ***i*-Transposition** oder **Transposition um *i*** für ein Intervall i gilt die durch $\tau_i(x) \coloneqq x+i$ definierte Abbildung τ_i. Sie ist wegen (10) eine intervalltreue Transposition laut *Kp*(3).
Für Notenmengen A gilt: $\tau_i(A) \coloneqq A+i \coloneqq \{x+i|x\in A\}$ und $A-i \coloneqq \{x-i|x\in A\}$.

Der doppelte Kontrapunkt (1) nutzt eine nicht-intervalltreue, aber vorzeichentreue Transposition der Melodie (von phrygisch nach mixolydisch) und addiert eine große oder kleine Unterdezime. Die Tonhöhenänderung variiert hier also punktuell ein wenig. Prinzipiell kann jeder Ton in Musikstücken die Tonhöhe frei ändern, denn das addierte Intervall ist für jeden Ton einzeln berechenbar:

(12) Für Tonhöhenänderungen f des Musikstücks M mit schlichten Noten x gilt:[2]
$f(x)=x+(f(x)-x)$ und speziell $f(x)=x$ für Pausen x
$f(AB)=f(A)f(B)$ für Sätze AB und $f\begin{pmatrix}S_1\\ \vdots \\ S_n\end{pmatrix} = \begin{matrix}f(S_1)\\ \vdots \\ f(S_n)\end{matrix}$ für Sätze $\begin{matrix}S_1\\ \vdots \\ S_n\end{matrix}$
$f^*(f(x)) \coloneqq f(x)+(x-f(x))$ definiert inverse Tonhöhenänderung f^* des Musikstücks $f(M)$ mit $f^*(f(x))=x$.
punktuell isomorph

Durch punktuelle Tonhöhenänderungen lassen sich auch nicht-intervalltreue Transpositionen mit alterierten Tönen genau bestimmen. Eindeutig symbolisiert werden jedoch nur vorzeichentreue Transpositionen:

(13) Als ***n*-Transposition** gilt eine Tonhöhenänderung f laut (12), bei der $f(x)-x$ aus der Stufe n ist. Es gilt: f ist eine intervallstufentreue Transposition laut *Kp*(3); die inverse Abbildung f^* ist eine $-n$-Transposition.[3]
Die vorzeichentreue n-Transposition ist eindeutig bestimmt und wird als τ_n notiert, wobei n kein Intervall angibt, sondern eine Stufe.
Alterierte n-Transpositionen (modulo ♯) zeigt $\tau_{n\sharp}$ näherungsweise an.[*Kp*(3)]

---

[2] Für Tonhöhenänderung f und Pausen x gilt stets $f(x)=[x_1,...,x_n]=x$ und nach *Kp*(1) folglich $f(x) = x = x+0 = x+(f(x)-x)$. Nach *Kp*(1) gilt dann $f^*(f(x)) \coloneqq f(x)+(x-f(x)) = f(x)+0 = x$.
Für schlichte Ton-Noten x gilt laut *N*(3)(7)(9) stets $x=[x_1,x_2,x_3,x_4]$ mit Tonhöhe$(x)=x_2$, wegen der Merkmaltreue gilt dann $f(x)=[x_1,\text{Tonhöhe}(f(x)),x_3,x_4]$ und somit $f(x) = [x_1,x_2+(\text{Tonhöhe}(f(x))-\text{Tonhöhe}(x)),x_3,x_4] = [x_1,x_2+(f(x)-x),x_3,x_4] = x+(f(x)-x)$. Es gilt dann $f^*(f(x)) \coloneqq f(x)+(x-f(x)) = (x+(f(x)-x))+(x-f(x)) = x+(f(x)-x)-(f(x)-x)) = x$.
$f: M\rightarrow f(M)$ ist bijektiv, da f alle Noten von M auf alle Noten $f(M)$ eindeutig abbildet, denn laut *N*(7) ist die p-te Note der q-ten Stimme $v_{p[q]}=v_{x_3[x_4]}$ bei M und analog bei $f(M)$. f ist positions- und schichttreu, so dass die Isomorphiebedingungen gelten.

[3] Sei $(f(x)-x)\in$Stufe n und $(f(y)-y)\in$Stufe n; mit *stufengleich H*(16) und Def *H*(16) folgt dann [1] Stufe$(f(x)-x)$ = Stufe n = Stufe$(f(y)-y)$. Per *Stufendifferenz/-summe H*(16) und [1] folgt Stufe$(f(x)-f(y))$ = Stufe$((f(x)-x)-(f(y)-y)+x-y)$ = Stufe$(f(x)-x)$–Stufe$(f(y)-y)$+Stufe$(x-y)$ = Stufe n – Stufe n +Stufe$(x-y)$ = Stufe$(x-y)$.
Da f bijektiv ist, gibt es x mit $x=f(y)$. Also [2] $f^*(x)-x = f^*(f(y))-f(y) = y-f(y) = -(f(y)-y)$. Wegen $(f(y)-y)\in$Stufe n gilt Stufe$(f(y)-y)$=Stufe n und Stufe$(-(f(y)-y))$=–Stufe$(f(y)-y)$= –Stufe n und mit [2] $(f^*(x)-x)\in$–Stufe n.

Transpositionen werden in schematisch dargestellten Sätzen abgekürzt durch die hochgestellte Stufe, wobei Alterationen einzelner Töne vernachlässigt werden:

(14) Für Notenmengen A und Stufen n gelten folgende Kurzschreibweisen:
$A^n \coloneqq \tau_n(A)$, auch als Repräsentant für Transpositonen $\tau_{n\sharp}(A)$
$A' \coloneqq A^8$ für Oktavtransposition (intervalltreu)
$\underline{A} \coloneqq A^{-8}$ für Unteroktavtransposition (intervalltreu)
$A^{n'} \coloneqq A^{n+7}$ für Oktavierungen mit Rechenregeln laut *H*(17)
punktuell isomorph wird auf Transpositionen übertragen durch:
$[AB]^n \coloneqq A^nB^n$ und $\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix}^n \coloneqq \begin{matrix} S_1{}^n \\ \vdots \\ S_m{}^n \end{matrix}$

Umkehrungen in den Kontrapunkten (5)ff sind ebenfalls Tonhöhenänderungen, die jeweils nur die Richtung der Intervallstufen ändern. Exakte Umkehrungen wie (4) werden punktuell präzise beschrieben als Spiegelung an einer Tonhöhenachse (unabhängig vom gewählten Musikstück):

(15) Als **Umkehrung** gilt eine Tonhöhenänderung U von Musikstücken laut (12), bei der $U(x)$–$U(y)$ aus der Stufe(y–x) ist. Als schematische Abkürzung gilt $-A \coloneqq U(A)$ für Notenmengen A des Musikstücks, für das U definiert ist.
Die inverse Tonhöhenänderung U^* mit $U^*(U(x))=x$ ist eine Umkehrung.[4]

(16) Eine **Spiegelung** ist eine selbstinverse Abbildung f mit $f(f(x))=x$.

(17) Die Abbildung U_α mit $U_\alpha(x) \coloneqq x+2(\alpha\text{–Tonhöhe}(x))$ für eine Tonhöhe α gilt als **Umkehrung um die Achse** α. Ihre Alterierungen (modulo ♯) zeigt $U_{\alpha\sharp}$ näherungsweise an.*Kp*(3)
Eine Tonhöhenänderung U mit $U(x)$–$U(y) = y$–x gilt als **exakte Umkehrung**. $\alpha \coloneqq {}^1\!/_2(\text{Tonhöhe}(x)+\text{Tonhöhe}(U(x)))$ definiert ihre Achse.
Es gilt: Exakte Umkehrungen U sind Spiegelungen mit $U(U(x))=x$; mit der Definition von α, die unabhängig von der Wahl des Tones x ist, gilt $U=U_\alpha$. U_α ist eine exakte Umkehrung mit Fixtönen $U_\alpha(x)=x \Leftrightarrow \text{Tonhöhe}(x)=\alpha$. Eingeschränkt auf ein Musikstück ist es eine Umkehrung laut (15).[5]

Das arithmetische Mittel zweier Tonhöhen ergibt die Achse. Nur wenn die Tonhöhensumme im Stufensystem halbierbar ist, liegt die Achse auf einer Stufe; das ist wegen der archaischen Zählweise*H*(17) der Fall bei ungeraden Stufen! Bei geraden Stufen dagegen ist die Tonhöhensumme nicht halbierbar und die Achse

---

[4] Da U bijektiv ist, gibt es a, b mit $x=U(a)$ und $y=U(b)$. Also gilt mit (12): [1] $U^*(x)$–$U^*(y) = U^*(U(a))$–$U^*(U(b)) = a$–b. Ferner $(U(b)$–$U(a))\in\text{Stufe}(a$–$b)$, also $(y$–$x)\in\text{Stufe}(a$–$b)$, wegen *stufengleich H*(16) gilt dann $\text{Stufe}(y$–$x)=\text{Stufe}(a$–$b)$ und $(a$–$b)\in\text{Stufe}(y$–$x)$ und mit [1] somit $U^*(x)$–$U^*(y)\in\text{Stufe}(y$–$x)$, und U^* ist die inverse Umkehrung.

[5] Kürze ab $\text{T}x \coloneqq \text{Tonhöhe}(x)$. Offenbar $U_\alpha(x)=x \Leftrightarrow 2(\alpha\text{–T}x)=0 \Leftrightarrow \text{T}x=\alpha$. Ferner gilt $U_\alpha(x)$–$U_\alpha(y) = \text{T}U_\alpha(x)$–$\text{T}U_\alpha(y) = \text{T}x+2(\alpha\text{–T}x)$–$(\text{T}y+2(\alpha\text{–T}y) = \text{T}y\text{–T}x = y$–$x$. Mit (12) ergibt sich: $U(U(x)) = U(x)+(U(U(x))$–$U(x)) = U(x)+(x$–$U(x)) = U^*(U(x)) = x$. Aus $U(x)$–$U(y)=y$–x folgt $U(x)$–$U(y)=\text{T}y\text{–T}x$ und daraus $\text{T}x+\text{T}U(x)=\text{T}y+\text{T}U(y)$, daher ist die Definition von α unabhängig von der Wahl von x. Aus ihr folgt $\text{T}U(x)=2\alpha\text{–T}x$ und damit $U(x) = x+(U(x)$–$x) = x+(\text{T}U(x)\text{–T}x) = x+(2\alpha\text{–T}x\text{–T}x) = x+2(\alpha\text{–T}x) = U_\alpha(x)$.

deswegen imaginär.[6] Die Achsen-Definition (17) passt auch auf alterierte Umkehrungen zum frühesten Ton der ersten Stimme; bei anderen Tönen kann die Achse alteriert sein:

(18)

Umkehrungsbeispiel	Typ	$x \to U(x)$	Tonhöhensumme 2α	Achse α
(4) A →-A	exakt	g → a	g+a ∈ Stufe 10	g+$^1/_2$Ton imaginär[6]
(5) A →-B B →-A	inexakt	c' → d'	c'+d' ∈ Stufe 16	c'+$^1/_2$Ton imaginär[6]
(6) Schema (21) (6)	inexakt	a' → c	a'+c ∈ Stufe 15	h

Der Krebs ist eine Spiegelung an einer Zeitachse. Bei ihm wird die Tonfolge rückwärts gelesen. Das erreicht eine Neuberechnung der Notenposition:N(4)(7)

(19) Als **Krebs** gilt eine Positionsänderung K eines Musikstücks M, für dessen Noten x gilt: Position($K(x)$)=Länge(M)–Ende(x).

Es gelten die Krebseigenschaften $K(AB)=K(B)K(A)$ und $K(l_1...l_n)=l_n...l_1$ für Notenfolgen. Ferner ist der Krebs eine Spiegelung mit $K(K(x))=x$.[7]

Zeitversetzungen durch vorgeschaltete Pausen betten einen Satz in einen Satz mit mehr Noten ein. Das Bild des Satzes ist daher nur ein Teil, der nicht mehr als selbständiger Satz notiert werden kann! In den Notenbeispielen (2) (3) (4) (6) ist dieser versetzte Teil jedoch direkt sichtbar. Die Position der Noten verändert sich dort, indem die Länge vorgeschalteter Pausen addiert wird:

(20) Als **Zeitversetzung** um p für eine Dauer $p>0$ gilt eine Positionsänderung $\triangleright p$ mit Position($\triangleright p(x)$)=Position(x)+p.

Für Musikstücke A, P mit p=Länge(P) gilt $PA=P\cup\triangleright p(A)$; das heißt: Die Zeitversetzung $\triangleright p(A)$ ist Teil von PA. P kann aus lauter Pausen bestehen.

Schematisch dargestellte Sätze nutzen die Zusammensetzung, bei der synchrone Teile übereinanderstehen. Das Musikstück wird in gleichlange Blöcke zerlegt und eventuelle Bindungen werden vernachlässigt. Pausen erscheinen als gleich-

---

[6] Die Achsen c'+$^1/_2$Ton bzw. g+$^1/_2$Ton sind in der Notenschrift imaginär und liegen zwischen cis' und des' bzw. gis und as; auf dem zwölfstufig temperierten Klavier dagegen fallen diese Töne zusammen: c'+$^1/_2$Ton=cis'=des' bzw. g+$^1/_2$Ton=gis=as.

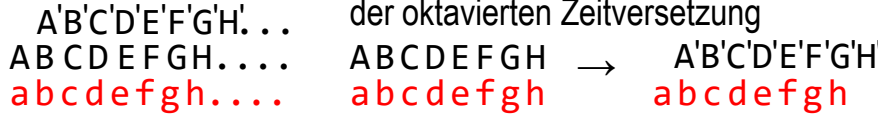
[7] Sei $l_1...l_n$ die Notenfolge zu einer Stimme von M. $s_i := l_{n-i+1}$ erzeugt, da $s_1=l_n$ und $s_n=l_1$ 1, die gespiegelte Folge $s_1...s_n=l_n...l_1$ mit $l_i=l_{n-(n-i+1)+1}=s_{n-i+1}$ 2 und $l_{i+1}=l_{n-(n-i)+1}=s_{n-i}$ 3. Kürze ab D := Dauer, P := Position in $K(M)$, Q := Position in M. Laut N(6) gilt auch Länge(M)=D(l_1)+...+D(l_n) und laut N(4) Ende(l_i)=D(l_1)+...+D(l_i) also per Definition P($K(l_i)$)=D(l_1)+...+D(l_n)–(D(l_1)+...+D(l_i)). Für $i=n$ ist das laut 1 P($K(l_i)$)=P($K(l_n)$)=0 =P(s_1)=P(s_{n-n+1})=P(s_{n-i+1}) und für $i<n$ P($K(l_i)$)=D(l_{i+1})+...+D(l_n), also mit 1 3 monoton geordnet P($K(l_i)$)=D(s_1)+...+D(s_{n-i}) und somit per N(4) ebenfalls P($K(l_i)$)=P(s_{n-i+1}). Da der Krebs als Positionsänderung ansonsten merkmaltreu ist, gilt für zugehörige Noten in M offenbar mit 2 $K(l_{i[Q(l_i)]})=s_{n-i+1[P(s_{n-i+1})]}$ und somit für die Noten folge $K(l_1...l_n)=s_1...s_n$ $=l_n...l_1$. Durch Zerlegung erhält man offenbar $K(AB)=K(B)K(A)$.
Der Beweis läuft symmetrisch, wenn man stets s und l vertauscht und ebenso Q und P und ergibt $K(s_{i[P(s_i)]})=l_{n-i+1[Q(l_{n-i+1})]}$ und somit nach Substitution von i durch n-i+1 die Spiegelung $K(K(l_{i[Q(l_i)]}))=K(s_{n-i+1[P(s_{n-i+1})]})=l_{i[Q(l_i)]}$.

lange Lücken. Freie Teile werden als ... notiert. Schemata zu Vicentinos doppelten Kontrapunkten mit Zeitversetzung sehen dann so aus:

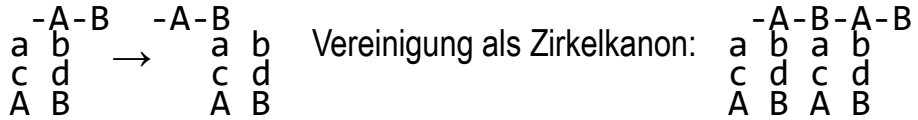
(21) Beispiel (2): doppelter Zeitversetzungskontrapunkt (Cantus-firmus rot)
+ doppelter Kontrapunkt der Dezime als Parallelkanon:



Beispiel $(3)_1$: Oktavkanon = Vereinigung des doppelten Kontrapunkts der oktavierten Zeitversetzung



Beispiel (6): Umkehrungskanon im doppelten Umkehrungskontrapunkt erzeugt einen doppelten Zeitversetzungskontrapunkt



Vicentino nannte keine Regeln für Zeitversetzungen, da sie die Synchronizität zerstören und neue schwer kalkulierbare harmonische Bezüge erzeugen. Eine **Doppelkontrapunkt-Technik** beschränkt sich daher auf synchrone Abbildungen, besonders auf solche, bei denen Konsonanzen konsonant bleiben:

(22) Als **synchron** gilt eine Abbildung κ, wenn Töne x und y genau dann simultan sind, wenn auch $\kappa(x)$ und $\kappa(y)$ simultan sind. Solch eine Abbildung gilt als **konsonanztreu**, falls für jede Konsonanz x–y simultaner Töne x und y auch $\kappa(x)$–$\kappa(y)$ eine Konsonanz gemäß *Kp*(5)ist.
A gilt als **doppelter κ-Kontrapunkt**, falls A und $\kappa(A)$ Kontrapunkte sind zur synchronen Abbildung κ.

(23) Positions- und dauerntreue Abbildungen sind synchron, insbesondere Tonhöhenänderungen und der Krebs. Intervalltreue synchrone Abbildungen sind konsonanztreu, speziell intervalltreue Transpositionen und der Krebs. Exakte Umkehrungen sind nicht intervalltreu, aber dennoch konsonanztreu.

(24) Stimmtausch, intervalltreue Transpositionen, Zeitversetzungen, Vergrößerungen und Verkleinerungen*N*(10) sind intervalltreu und somit auch konsonanztreu und bilden Kontrapunkte stets automatisch auf Kontrapunkte ab.

Vicentino nutzte im Krebskanon (7) einen doppelten Krebskontrapunkt, verbunden mit einem Dissonanzverbot. Seine Lösungsstrategie war also ein total konsonanter Satz; das funktioniert natürlich, da der Krebs konsonanztreu ist:

(25) Kontrapunkte Note gegen Note sind doppelte Krebs-Kontrapunkte.

(26) Doppelter Krebs-Kontrapunkt: zugehöriger Krebszirkelkanon (7):

$\begin{matrix}\mathsf{B}\\\mathsf{C}\end{matrix}\!\!\rightarrow\!\!\begin{matrix}\mathsf{Ↄ}\\\mathsf{ɡ}\end{matrix}$ mit $\mathsf{ɡ} := K(\mathsf{B})$ und $\mathsf{Ↄ} := K(\mathsf{C})$ $\quad |:\begin{matrix}\mathsf{B}\mathsf{Ↄ}\\\mathsf{C}\mathsf{ɡ}\end{matrix}:|$ mit $\mathsf{C}\mathsf{ɡ}=K(\mathsf{B}\mathsf{Ↄ})$

Zum Dissonanzverbot zwingt nur ein strenger Stil, der nur klassische Vorhalte und unbetonte Durchgänge und Wechselnoten erlaubt.*Kp*(17) Im freieren Stil, etwa

in Bachs Krebskanon des *Musikalischem Opfers*, gelten diese Einschränkungen nicht. Betonte Durchgänge und Wechselnoten, die der Krebs erzeugt, waren auch im Kontrapunkt immer üblich, nur seltener.[Kp(19)(23)] Ratsam ist jedoch ein Verzicht auf dissonante Vorhalte, da sie im Krebs zu Antizipationen im freien Stil werden.[Kp(28)] Als **Regel für doppelte Krebs-Kontrapunkte** gilt somit:

(27) Kontrapunkte ohne dissonante Vorhalte sind doppelte Krebs-Kontrapunkte.

Umkehrungen sind konsonanztreu und ändern nur die Intervallrichtung, aber nicht den Rhythmus und die Betonung. Sie betreffen Durchgänge und Wechselnoten gar nicht. Daher gab wohl Vicentino auch keine einschränkenden Regeln an. Solche sind aber im strengen Stil fällig. Vicentinos Kollege Gioseffo Zarlino ergänzte solche in *Le Istitutioni harmoniche* 1558 [Z]: Er verlangte, dass alle Synkopen konsonant sind und der Tenor zum Sopran keine Quarte bildet.[Z232] Damit schloss er klassische Vorhalte nach unten aus, da sie bei einer Umkehrung Vorhalte nach oben erzeugen, die er nicht erlaubte. Der freiere Barockstil gebraucht sie,[Kp(28)] sichtbar an den Spiegelfugen *Contrapunctus 12* und *Contrapunctus 13* in Bachs *Kunst der Fuge*. Statt des Verbots von Quarten zum Sopran genügt es, jede Quarte zum höchsten Akkordton als Dissonanz zu behandeln, damit die Umkehrung keine falsche Quarte zum Basston erzeugt. Dies erfasst eine **Regel für doppelte Umkehrungs-Kontrapunkte**:

(28) Kontrapunkte mit einer Reduktion laut *Kp*(26) ohne Quartakkorde und ohne Umkehrungen von Quartakkorden sind doppelte Umkehrungskontrapunkte.

Bei Umkehrungen vertauschen die Stimmen automatisch ihre Stimmlage. Das praktizierte Vicentino auch bei doppelten Kontrapunkten, bei denen nur eine Stimme transponiert wird. Bei Stimmkreuzungen ist die Lage über- oder untereinander allerdings nicht eindeutig. Die Fälle unterscheidet man mit Intervallen simultaner Töne:

(29) Gilt für simultane Töne a aus A und b aus B stets $a–b\geqslant 0$, so liegt A **über** B und B **unter** A. A **kreuzt** B, falls weder A über B noch B über A liegt.

(30) Beispiel (1) $\begin{matrix}A\\B\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}B\\A^{-10}\end{matrix}$ Beispiel $(2)_{2+3}$ $\begin{matrix}A\\B\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}B^{10}\\A\end{matrix} = \left[\begin{matrix}B\\A^{-10}\end{matrix}\right]^{10}$ | Beispiel $(8)_1$ $\begin{matrix}A\\B\\C\\D\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}B\\C\\A^{-8}\\D\end{matrix}$ Beispiel $(8)_2$ $\begin{matrix}A\\B\\C\\D\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}C^8\\A\\B\\D\end{matrix}$ $\begin{matrix}C^8\\A\end{matrix} = \left[\begin{matrix}C\\A^{-8}\end{matrix}\right]^8$

(1) $(8)_2$ haben keine Stimmkreuzungen, $(2)_{2+3}$ $(8)_1$ haben Stimmkreuzungen.

Vicentino transponierte teils die Oberstimme unter die zweite Stimme, teils auch die untere über die obere. Der zweite Fall dient hier als Norm für diese wichtige Sorte doppelter Kontrapunkte, da sich andere Fälle mit (24) durch Stimmtausch und Transponieren errechnen lassen:

(31) Als **doppelter Kontrapunkt der *n*-ten Stufe** oder ***n*-te-Stufe-Kontrapunkt** gilt ein doppelter κ_n-Kontrapunkt $\frac{A}{B}$ mit $\kappa_n(\frac{A}{B}) \coloneqq \frac{A}{B^n}$. Liegt A über B und A unter B^n, gilt er als **kreuzungsfrei**.

Der Gegenstand der Theorie sind üblicherweise die Regeln für kreuzungsfreie doppelte Kontrapunkte. Man leitet sie ab aus zwei Skalen mit den Nummern der Intervallstufen, eine Skala für die Intervalle im Kontrapunkt und eine gegenläufige Skala für die Intervalle im abgebildeten Kontrapunkt, notiert in der Form $\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&5&4&3&2&1\end{smallmatrix}$, die Angelo Berardi 1681 angab:[BA147]

Aus erweiterten Skalen mit Daten zu Konsonanzen und Dissonanzen lassen sich die gültigen Regeln genauer ableiten. Negative Intervallstufen, die bei Stimmkreuzungen vorkommen, werden in solchen Skalen grau unterlegt. Verbotene Parallelen werden mit $_{\neq}$ markiert. Dissonanzen werden rot gefärbt. Konsonanzen, die als Dissonanzen zu behandeln sind, wenn sie falsche Quarten zum Bass erzeugen, werden mit Fragezeichen markiert. Man darf sie benutzen, wenn eine Bass-Füllstimmen hinzukommt, im zweistimmigen Satz sind sie illegal:

(32) Konsonanzen einer Skala gelten als **fraglich**, wenn sie als *n*? bezeichnet sind, andernfalls als **legal**. Für Kontrapunkte mit freiem Bass gilt dann *n*?=*n*, für zweistimmige Kontrapunkte dagegen *n*?=***n***.

Die Daten der Skala 1 für den Kontrapunkt und der Skala 2 für abgebildeten Kontrapunkt werden in einer dritten Scala 1+2 kombiniert. In ihr sind dann alle gültigen Regeln für den gewählten Kontrapunkt-Typ abzulesen, zum Beispiel alle **Regeln für den doppelten Kontrapunkt der Oktave**:

(33)

	doppelter Kontrapunkt der Oktave																		
1 *a*–*b*	-6	$-5_{\neq}$	-4?	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	4?	$5_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**9**	10	11?	$12_{\neq}$	13	**14**	$15_{\neq}$
2 b^8–*a*	13	$12_{\neq}$	11?	10	**9**	$8_{\neq}$	**7**	6	$5_{\neq}$	4?	3	**2**	1	**-2**	-3	-4?	$-5_{\neq}$	-6	**-7**	$-8_{\neq}$
1+2	-6	$-5_{\neq}$	-4?	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	$4?_{\neq}$	$5?_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**9**	10	11?	$12_{\neq}$	13	**14**	$15_{\neq}$

Im Kreuzungsbereich passiert hier nichts. Im fett umrahmten kreuzungsfreien Bereich dagegen sind Quartparallelen verboten und Quinten fragliche Konsonanzen. Vicentino verwendete sie nur in Oktav-Kontrapunkten mit freiem Bass (8), da dort alle Konsonanzen legal sind; zu beachten ist dort nur das Quartparallelenverbot, das er verschwieg. Sein Verbot von Quinten[V38] gilt für zweistimmige Sätze, in denen nur $1_{\neq}$ 3 6 $8_{\neq}$ legale Konsonanzen sind. Das ist die wichtige Information zum Komponieren. Denn alles Weitere ergibt sich aus einem fantasievollen Dissonanzgebrauch.

Oft wird auch der um eine Oktave vergrößerte Bereich mit oktavierten Intervallen genutzt, also Doppeloktav-Kontrapunkte. Bei ihnen kommen oktavierte legale Konsonanzen hinzu, nämlich 3' 6' $8'_{\neq}$. Diese Routineerweiterung ist auch bei anderen kreuzungsfreien doppelten Kontrapunkten möglich, da sich Harmonien beim Oktavieren nicht ändern:

(34) Kreuzungsfreie *n*-Kontrapunkte sind stets kreuzungsfreie *n*'-Kontrapunkte. N.B.: Die umgekehrte Richtung gilt nicht immer.
k ist eine legale Konsonanz im *n*-Kontrapunkt genau dann, wenn *k* und *k*' legale Konsonanzen im *n*'-Kontrapunkt sind.

Bei den **Regeln für den doppelten Kontrapunkt der Dezime** werden die beiden gegenläufigen Skalen etwas verschoben und sehen so aus:

(35)

	doppelter Kontrapunkt der Dezime																		
1 *a–b*	-6	-5≠	-4?	-3	**-2**	1≠	**2**	3	4?	5≠	6	**7**	8≠	**9**	10	11?	12≠	13	**14**	15≠
2 b^{10}–*a*	15≠	**14**	13	12≠	11?	10	**9**	8≠	**7**	6	5≠	4?	3	**2**	1≠	**-2**	-3	-4?	-5≠	-6
1+2	-6≠	**-5**≠	-4?	-3≠	**-2**	1≠	**2**	3≠	**4**	5≠	6≠	**7**	8≠	**9**	10≠	**11**	12≠	13?	**14**	15≠

Vicentinos Verbot von Terz- und Sextparallelen,[V34] die Oktav- und Quintparallelen erzeugen, ist in der unteren Skala ablesbar. Notwendig ist jedoch auch die obligatorische Dissonanzbehandlung von Quarten, die er nicht besprach. Das versäumte auch Zarlino, obwohl er stets genauere Kompositionsregeln angab; Manche Regeln Zarlinos sind aber nicht zwingend: Nur konsonante Synkopen zu benutzen,[Z231] also keine dissonanten Vorhalte, ist bei Dezim-Kontrapunkten nicht nötig. Zum brauchbaren Bereich rechnete er auch den Kreuzungsbereich bis zur Unterterz oder Duodezime, weil darüber die Tredezime fraglich und darunter die Unterquinte dissonant wäre. Das spielt im kreuzungsfreien Bereich keine Rolle. Wendet man aber – wie er in seinem Beispiel – den oktavierten Kontrapunkt (34) an, kann man gefahrlos die Tredezime nutzen. Zum Komponieren reicht wieder die Kenntnis der legalen Konsonanzen 1≠ 3≠ 5≠ 6≠ 8≠ ohne Parallelen mit eventuellen Oktavierungen. Er erwähnte ausdrücklich auch die dreistimmige Erweiterung der Kontrapunkte durch eine Dezimparallele, die Vicentino im Beispiel $(2)_3$ nur vage andeutete.

Vicentino erwähnte keine anderen doppelten Kontrapunkte. Vor allem überging er den doppelten Kontrapunkt der Duodezime, den Zarlino an die erste Stelle setzte.[Z229] Hier sehen die mit verschobenen gegenläufigen Skalen berechenbaren **Regeln für doppelte Kontrapunkte der Duodezime** so aus:

(36)

	doppelter Kontrapunkt der Duodezime																		
1 *a–b*	-5≠	-4?	-3	**-2**	1≠	**2**	3	4?	5≠	6	**7**	8≠	**9**	10	11?	12≠	13	**14**	15≠
2 b^{12}–*a*	**16**	15	**14**	13	12≠	11?	10	**9**	8≠	**7**	6	5≠	4?	3	**2**	1≠	**-2**	-3	-4
1+2	**-5**≠	-4?	**-3**	**-2**	1≠	**2**	3	**4**	5≠	**6**	**7**	8≠	**9**	10	**11'**	12≠	**13**	**14**	15≠

Zarlino schloss den Kreuzungsbereich aus wegen gehäufter Dissonanzen. Sein Verbot konsonanter Sexten ist in der Skala abzulesen. Zu ergänzen ist wieder die obligatorische Dissonanzbehandlung von Quarten. Ausdrücklich erlaubte er den oktavierten Kontrapunkt (34). Die legalen Konsonanzen ergeben sich bereits aus 1≠ 3 5≠ 8≠ mit Oktavierungen. In seinen Beispielen gebrauchte mit intervalltreuen Duodezim-Transpositionen. Selbstverständlich sind auch Alterationen möglich. Solche kommen im ältesten überlieferten Beispiel vor, nämlich im ersten bekannten Intervallkanon von Francesco Landini aus dem 14. Jahrhundert; im Ritornell stehen dort die um einen Takt versetzten Stimmen 2+3 zu den Stimmen 1+3 im doppelten Kontrapunkt der Duodezime:

(37) Doppelter Kontrapunkt der Duodezime: Francesco Landini (1325-1397): Ritornello aus: Deh Dimmi tu



An diesem mittelalterlichen Beispiel sieht man, dass im 14. Jahrhundert das Parallelenverbot noch nicht galt: In Takt 3+8 stehen Oktavparallelen, die in Takt 4+9 zu Quintparallelen werden. Die übrigen Kontrapunktregeln erfüllte Landini jedoch, wie man leicht nachprüfen kann.

Zarlino kombinierte abschließend die Doppelkontrapunkte der Duodezime, Dezime und Umkehrung in einem Kontrapunkt ohne Parallelen, ohne Vorhalte und ohne konsonante Sexten.[Z233] Es ist ein Kontrapunkt mit legalen Konsonanzen $1_{\neq}$ $3_{\neq}$ $5_{\neq}$ $8_{\neq}$ $10_{\neq}$ $12_{\neq}$. Da keine Quarten darunter sind, gilt auch der doppelte Umkehrungskontrapunkt laut Regel (28). Wer einen streng klassischen Stil will, kann wie Zarlino auf Vorhalte verzichten. In seinem Beispiel gab er auch dreistimmige Parallelkanon-Auflösungen; vierstimmige Auflösungen, die ebenfalls möglich sind, erwähnte er nicht:

(38)

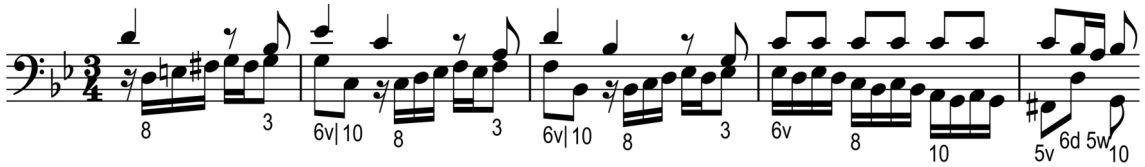
A	B^{8}	B^{8}	-B		B^{10}	A^{6}	B^{8}	$-A^{10}$	*theoretisch auch möglich:*	B^{10}	$-A^{10}$
B	A^{-5}	A^{-10}	-A		A	B^{8}	A^{-3}	-B		A	-B
					B	A^{-5}	B^{-3}	-A		B	-A
										A^{-10}	$-B^{-10}$

Eine Anwendung der beiden vierstimmigen Auflösungen zeigt der Kontrapunkt im Titelbild: Es ist ein symmetrischer achtfacher Kontrapunkt, der durch Vicentinos Spiegelungen aus einem Tetrachord erzeugt wird. Die Spiegelsymmetrie mit zwei Symmetrieachsen – mathematisch eine Diedergruppe D_2 oder Kleinsche Vierergruppe – ist optisch direkt erkennbar: Eine Achse ist der Taktstrich, die andere eine Tonhöhenachse. Jedes Notensystem für sich ist eine solche Untergruppe, das untere mit der Tonhöhenachse a, das obere mit der Tonhöhenachse cis'. Beide Notensysteme zusammen haben die imaginäre Achse e+$^{1}/_{2}$Ton und erzeugen dadurch Dezimparallelen. Harmonisch erzeugt diese Symmetrie eine Kadenz, die einen Dominantseptnonakkord aufbaut über eine freie Antizipation und diesen Akkord dann im Krebs als Vorhalt wieder auflöst.

Künstlerisch wertvolle Anwendungen dieser Techniken gibt es in Bachs *Kunst der Fuge*: *Contrapunctus 16+17* sind Kanons im doppelten Kontrapunkt der Dezime und der Duodezime. *Contrapunctus 9* ist eine Doppelfuge mit zwei Themen im Duodezim-Kontrapunkt. *Contrapunctus 10* ist eine Doppelfuge mit zwei Themen im Dezim-Kontrapunkt, die auch in dreistimmigen Parallelkanons geführt werden.[Takt 75, 85, 103, 115]

Bach kannte die Doppel-Kontrapunkt-Lehre, die über Sweelinck in der norddeutschen Orgelschule weitertradiert wurde.[*K*9f] Sweelincks Nachfolger passten sie stilistisch an den barocken Zeitstil an und ergänzten auch kleinere Details, darunter die vierstimmigen Parallelkanonauflösungen, die Zarlino noch nicht bewusst waren. Eine optimierte Regel dazu formulierte Christoph Bernhard im *Tractatus compositionis augmentatus*: nur Terzen und Oktaven als Konsonanzen zu gebrauchen, aber keine Konsonanzparallelen; im Beispiel oktavierte er diese Konsonanzen auch.[*BC* Kap.69] Legale Konsonanzen sind in diesem Fall $3_{\neq}$ $8_{\neq}$ mit Oktavierungen (34). Andere Intervalle werden automatisch wie Dissonanzen behandelt, auch Quinten und Duodezimen. Das ist notwendig, wenn zu Zarlinos Doppel-Kontrapunkt-Kombination noch ein Oktav-Kontrapunkt hinzukommt. Bach kannte eben diese Technik, denn er nutzte sie in der *Fuge 16 g-Moll* im *Wohltemperierten Klavier* II, die er auf folgendem zweistimmigen Kontrapunkt aufbaute:[Takt 20 (T.5+9 transponiert)]

(39)



Er nutzte hier den freien Barockstil mit abbrechenden Sext-Vorhalten (6v|),[*Kp*(28)] die sich über eine Verzierung erst auflösen. Die drei möglichen Auflösungen wandte er nacheinander an: als doppelter Kontrapunkt der Doppeloktave,[T.13] der Duodezime,[T.28] der Dezime.[T.36] Anschließend baute er in die Fuge auch verschiedene drei- und vierstimmige Auflösungen mit Parallelen ein, auch mit Terz- und Sextparallelen, die ein solcher Kontrapunkt gestattet, da die Addition oder Subtraktion einer Terz oder Sext zu den vier Konsonanzen wieder zu Konsonanzen führt.

1753, kurz nach Bachs Tod, publizierte Friedrich Wilhelm Marpurg in der *Abhandlung von der Fuge* [*M*] eine erweiterte Doppel-Kontrapunkt-Theorie. Er behandelte dort sieben Gattungen, benannt nach den sieben Intervallstufen nach Abzug einer Oktave: doppelter Kontrapunkt der Sekunde oder None, der Terz oder Dezime, etc.[*M*162-192] Ihn interessierten aber nur die großen Intervalle, wie seine Skalen jeweils zeigen. Er dachte also nicht an echte doppelte Kontrapunkte der Sekunde, Terz, etc. nach der präzisen Definition (22). Er konzentrierte sich auf zweistimmige Kontrapunkte und streifte Vereinfachungen bei Füllstimmen oder freiem Bass nur am Rande. Fehlende Details ergänzen Tabellen mit

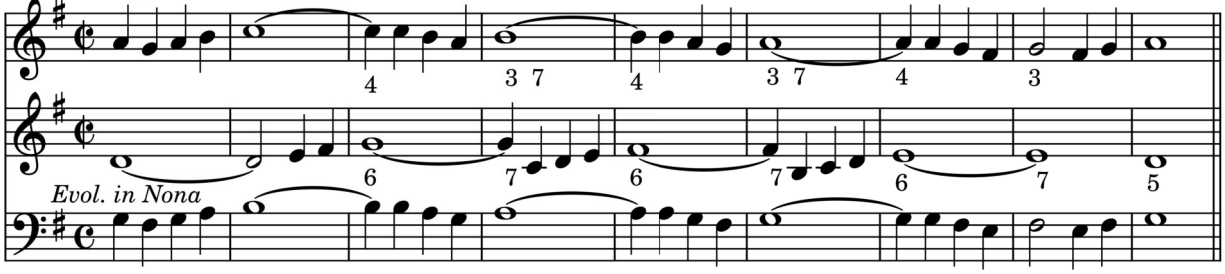
präzisierten Regeln für die von ihm neu eingeführten Gattungen, die im Folgenden vorgestellt werden, benannt nach den korrekten Intervallstufen. Zunächst die präzisierten **Regeln für doppelte Kontrapunkte der None**:

(40)

	doppelter Kontrapunkt der None																			
1 *a–b*	-6	-5≠	-4?	-3	**-2**	1≠	**2**	3	4?	5≠	6	**7**	8≠	**9**	10	11?	12≠	13	**14**	15≠
2 b^9–*a*	**14**	13	12≠	11?	10	**9**	8≠	**7**	6	5≠	4?	3	**2**	1≠	**-2**	-3	-4?	-5≠	-6	**-7**
1+2	**-6**	-5≠	-4?≠	-3?	**-2**	**1≠**	**2≠**	**3**	4?	5≠	6?	**7**	**8≠**	**9≠**	**10**	11?	12?≠	13≠	**14**	**15≠**

Im zweistimmigen Kontrapunkt der None, um den es Marpurg ging,[M170-177] bleibt als legale Konsonanz nur die Quinte [5≠] übrig. Alte Kontrapunktlehren klammerten doppelte Kontrapunkte mit derart ungünstigen Lösungsmöglichkeiten von vornherein aus. Sie entstehen bei der None, weil sie eine Sekunde neben der Oktave liegt und daher in gegenläufigen Skalen die Konsonanzen bis auf eine mit Dissonanzen zur Deckung kommen. Marpurg zeigte, dass trotzdem Lösungen möglich sind. Er notierte seinen doppelten Kontrapunkt der None samt Auflösung platzsparend in drei Notensystemen übereinander (statt in zweimal zwei Systemen) und bezifferte darin die wesentlichen legalen und fraglichen Konsonanzen und Dissonanzen:

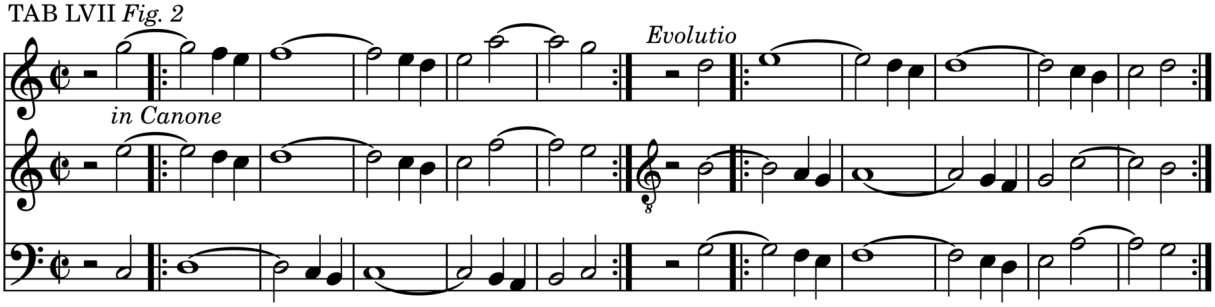
(41) TAB LVI *Fig. 1*



Bei den Dissonanzen sind zwei unvorbereitete Septim-Wechselnoten und zwei abbrechende Septim-Vorhalte, die typisch für den freien Barockstil sind.[Kp(29)f] Der Kontrapunkt in den Oberstimmen beginnt und endet notgedrungen mit der hohlen Quinte. Dazwischen müssen sich Dissonanzen mit fraglichen Konsonanzen abwechseln; dazu nutzte er eine verzierte Vorhaltskette 4-3-4-3-4-3, die in der Non-Auflösung der Unterstimmen zur umgepolten Vorhaltskette 6-7-6-7-6-7 wird.

Ein weiteres Beispiel Marpurgs für den doppelten Kontrapunkt der None hat Terzparallel-Füllstimmen, die Hohlklänge zu Dreiklängen machen und Doppelvorhalte dazwischen schalten:

(42) TAB LVII *Fig. 2*



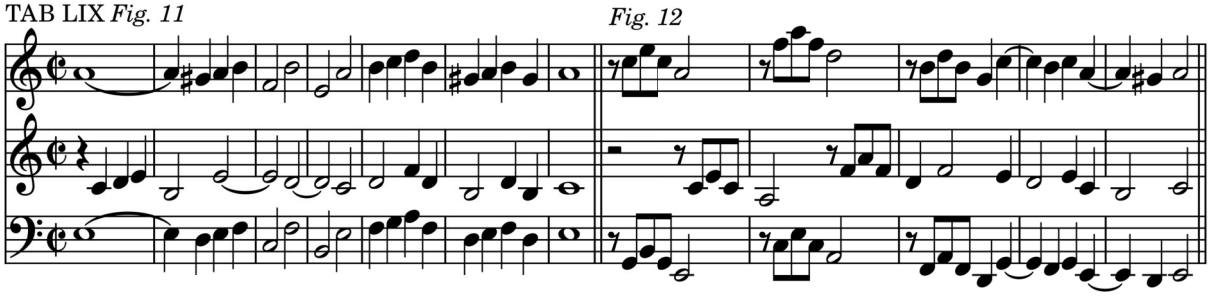
Ein ähnlicher Effekt entsteht auch bei der Undezime: Sie liegt eine Sekunde neben der Duodezime mit günstigen Konsonanzen. Daher decken sich auch hier in den gegenläufigen Skalen fast alle Konsonanzen mit Dissonanzen, so wie die **Regeln für doppelte Kontrapunkte der Undezime** es auch zeigen:

(43)

	doppelter Kontrapunkt der Undezime																		
[1] *a–b*	-5♯	-4?	-3	**-2**	1♯	**2**	3	4?	5♯	6	**7**	8♯	**9**	10	11?	12♯	13	**14**	15♯
[2] b^{11}–*a*	15♯	**14**	13	12♯	11?	10	**9**	8♯	**7**	6	5♯	4?	3	**2**	1♯	**-2**	-3	-4?	-5♯
[1]+[2]	-5♯	**-4**	-3	**-2**♯	1?♯	**2**	**3**	4?♯	**5**♯	6	**7**	8?♯	**9**	**10**	11?♯	**12**♯	13	**14**	15♯

Im zweistimmigen Satz ist die einzige legale Konsonanz die Sexte [6]. Andere Stufen sind wie Dissonanzen zu behandeln. Das ist aber viel günstiger als bei der None, da man Kontrapunkte mit Sextparallelen und Vorhalten komponieren kann, was Marpurg an zwei Beispielen vorführte (platzsparend notiert):

(44) TAB LIX *Fig. 11* *Fig. 12*



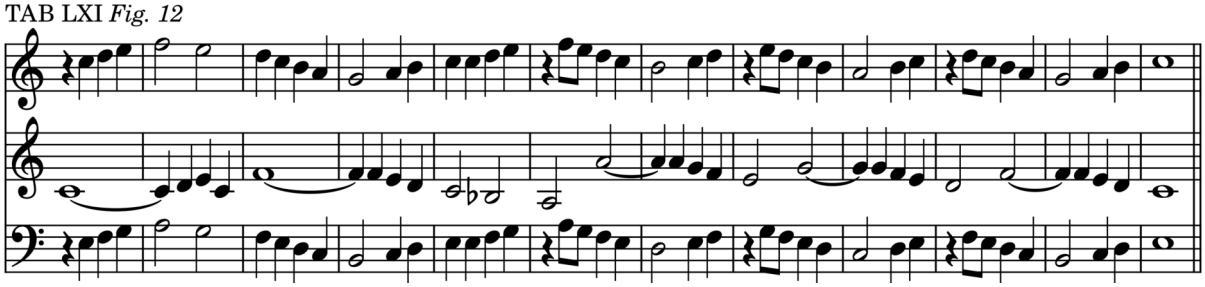
Die Intervallstufen bis zur Duodezime sind geläufig, darüber hinaus nicht mehr. Deshalb sind hier die kleineren Intervallnamen günstig. Das trifft sich damit, dass kurze Skalen genügen, um mit der Oktavierungsroutine (34) die legalen Konsonanzen auch für den Tredezim-Kontrapunkt abzuleiten. Nötig sind also nur die **Regeln für doppelte Kontrapunkte der Sexte**:

(45)

	doppelter Kontrapunkt der Sexte																		
[1] *a–b*	-6	-5♯	-4?	-3	**-2**	1♯	**2**	3	4?	5♯	6	**7**	8♯	**9**	10	11?	12♯	13	**14**	15♯
[2] b^{9}–*a*	11?	10	**9**	8♯	**7**	6	5♯	4?	3	**2**	1♯	**-2**	-3	-4?	-5♯	-6	**-7**	-8♯	**-9**	-10
[1]+[2]	**-6**	-5♯	-4?♯	-3?	**-2**	1♯	**2**♯	3?	4?	**5**♯	6♯	**7**	8♯	**9**	10♯	11?	**12**♯	13♯	**14**	15♯

Die legalen Konsonanzen sind hier [1♯] [6♯] mit Oktavierungen. Probleme, solche Kontrapunkte zu komponieren, gibt es natürlich nicht. Marpurg begnügte sich mit folgendem Beispiel, das aber in den ersten beiden Takten Terzen und Quarten nutzt und damit nur in einem Satz mit freiem Bass regelrecht komponiert ist; ab Takt 3 läuft aber alles regelrecht:

(46) TAB LXI *Fig. 12*



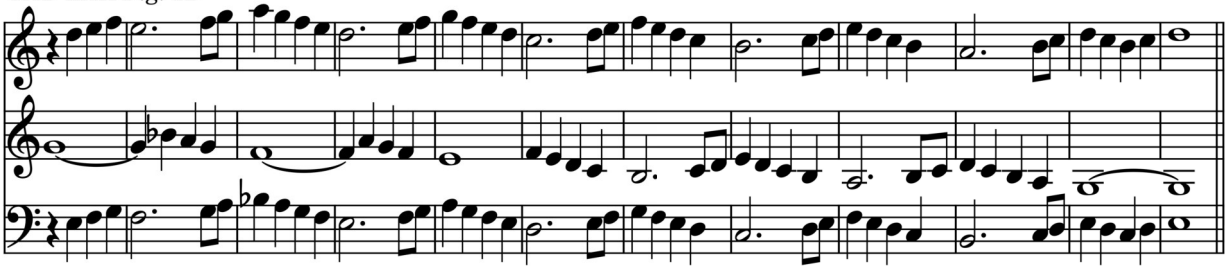
Die präzisierten **Regeln für doppelte Kontrapunkte der Septime** schließen Marpurgs Kontrapunkttypen ab:

(47)

	doppelter Kontrapunkt der Septime																			
[1] *a–b*	-6	-5≠	-4?	-3	**-2**	1≠	**2**	3	4?	5≠	6	**7**	8≠	**9**	10	11?	12≠	13	**14**	15≠
[2] b^9–*a*	12≠	11?	10	**9**	8≠	**7**	6	5≠	4?	3	**2**	1≠	**-2**	-3	-4?	-5≠	-6	**-7**	-8≠	**-9**
[1]+[2]	-6≠	-5?≠	-4?	-3?	**-2**≠	**1**≠	**2**	3≠	4?	5≠	**6**	**7**≠	**8**≠	**9**	10≠	11?≠	12≠	**13**	**14**≠	**15**≠

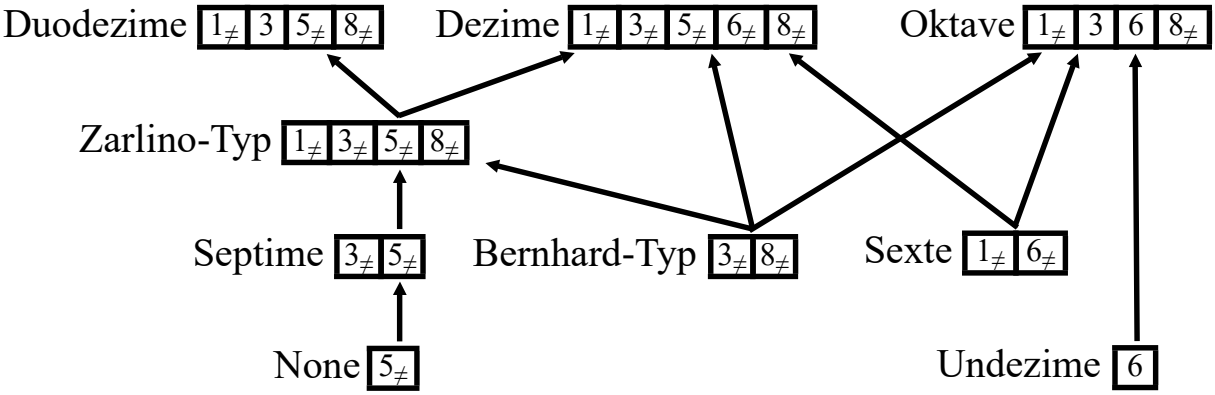
Hier sind Terzen und Quinten legale Konsonanzen [3≠ 5≠], die ohne Parallelen genutzt werden können, natürlich mit Oktavierungen. Mit Seiten- oder Gegenbewegung kommt man immer durch, wie es Marpurg in seinem Beispiel mit Oktavierungen praktizierte:

(48) TAB LXII *Fig. 12*



Offensichtlich ist jeder doppelte Non-Kontrapunkt mit [5≠] auch ein Septim-Kontrapunkt. Diesen Effekt nutzte Marpurg selbst im Beispiel (42) mit Terzparallelen. Man sieht an den legalen Konsonanzen auch, dass Septim-Kontrapunkte zugleich doppelte Kontrapunkte der Dezime und Duodezime sind, also der Kontrapunkt-Kombination Zarlinos. Solche zusätzlichen Auflösungen lassen sich an den gegebenen Beispielen verifizieren. Manche klingen stellenweise hohl, aber mit Parallelen wesentlich besser; sie sind natürlich auch eingebettet in einen mehrstimmigen Satz gut zu gebrauchen. Abschließend zeichnet ein Graph die Beziehungen zwischen den erörterten doppelten Kontrapunkten vollständig auf und fasst damit die Kontrapunktlehre kompakt zusammen:

(49)



Anwendungen von doppelten Kontrapunkten in Kanons gab Marpurg nicht. Es gibt natürlich solche, wie das nächste Heft zur KANONTECHNIK zeigt. Seine *Abhandlung von der Fuge* wurde ein wichtiges Lehrwerk für Komponisten der Klassik und Romantik. Von seiner erweiterten Doppel-Kontrapunkt-Technik machten sie jedoch keinen Gebrauch. Schon althergebrachte Techniken sind

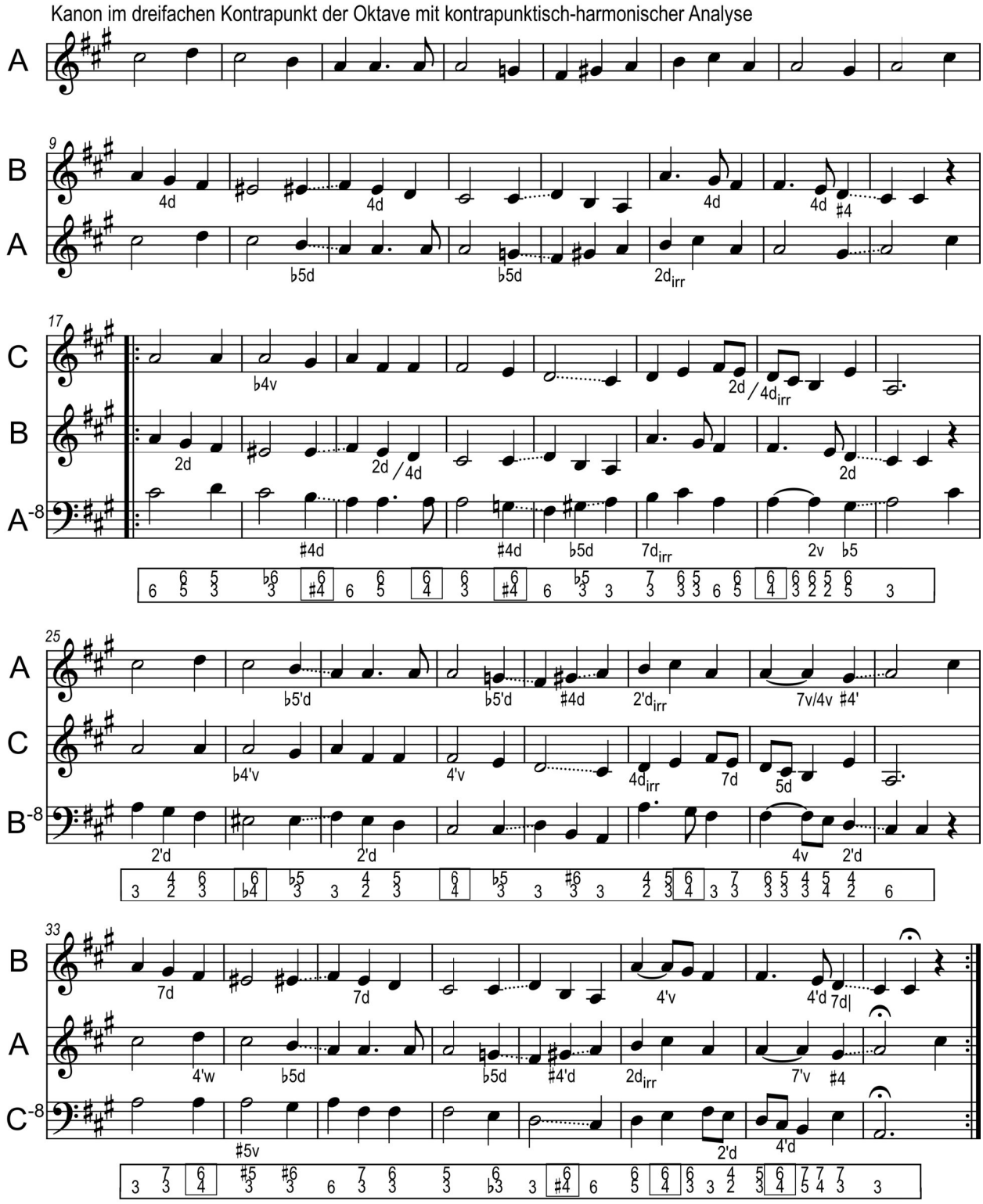
sehr selten: Eine Ausnahme ist der Duodezim-Kontrapunkt der Haydn-Variation IV von Brahms. Anwendungen von Marpurgs neuen doppelten Kontrapunkten, die keine Tradition hatten und nur eingeschränkte Lösungsmöglichkeiten boten, sind nicht bekannt. Musiker der Klassik und Romantik hatten kaum noch Interesse an Formalismen, die nur die Fantasie einschränken. Bei ihnen war allein der doppelte Kontrapunkt der Oktave wichtig und auch allgegenwärtig. Ihn beherrschte jeder Kompositionsschüler sofort, denn er ist zweistimmig ziemlich trivial und eingebettet in einen mehrstimmigen Satz noch trivialer, weil nur Quartparallelen zu meiden sind.

Kompliziert ist erst ein mehrstimmiger Satz für gemischte vertauschbare Stimmen, ein **mehrfacher Kontrapunkt der Oktave**, bei der jede Stimme im Bass stehen kann. Hier verursachen Quinten in Dreiklängen chronische Probleme. Regelrecht komponierte Werke zu dieser Technik mit künstlerischem Anspruch sind kaum bekannt. Auch Bachs zahlreiche Permutationsfugen für Chor, die angeblich im drei- bis fünffachen Kontrapunkt der Oktave komponiert sind, halten einer genauen Analyse nicht stand: Für ihn war die Permutationsfuge keine komplexe Komposition, sondern im Gegenteil ein Schnellkompositionsverfahren, bei dem er die exakte mathematische Form ignorierte: Er fügte oft einen Instrumentalbass hinzu und änderte Stimmen an Problemstellen häufig ab.[SN111f] Strenge Permutationen ohne Füllstimmen hat nur seine dreistimmige *Sinfonia f-moll* für Klavier. Doch gerade in dieser echten Permutationsfuge ließ er mehrere ‚falsche' Quarten einfach stehen. Sie fallen allerdings wegen der herben chromatischen Harmonik kaum auf.

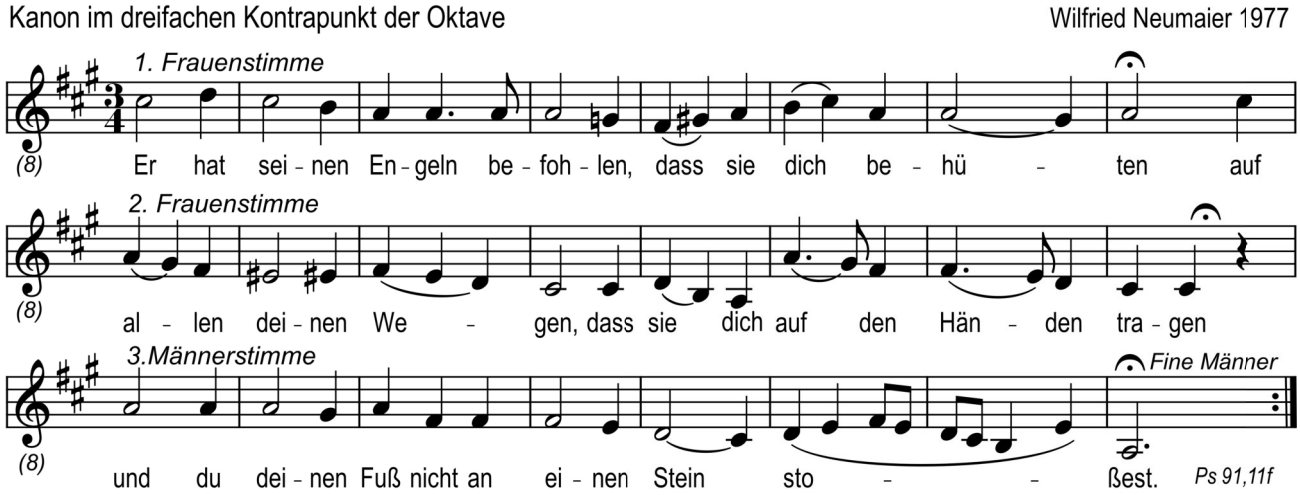
Auf zyklischen Permutationen bauen auch übliche Zirkelkanons auf, die es in Hülle und Fülle gibt, auch von prominenten Komponisten. Aber sie sind so gut wie immer für gleiche Stimmen komponiert, da sie meist für gesellige Anlässe geschrieben sind. Daher wandten Komponisten hier keine komplexe Kontrapunkttechnik an. Sie wäre erst erforderlich bei einem Zirkelkanon für mehrstimmigen Chor, wie am Schema eines Kanons für zwei Frauenstimmen und eine Männerstimme zu erkennen ist:

(50) $\begin{matrix} A & B \\ & A \end{matrix} \left| \begin{matrix} C & A & B \\ B & C & A \\ A^{-8} & B^{-8} & C^{-8} \end{matrix} \right|$ *dreifacher Kontrapunkt* $\begin{matrix} B & B & B \\ A & A^{-8} & A^{8} \end{matrix} = \begin{bmatrix} A \\ B^{-8} \end{bmatrix}$ *analog für* $\begin{matrix} C \\ B \end{matrix}$ *und* $\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}$

Ein Beispiel ist mir bei der wissenschaftlichen Recherche nie begegnet. Das war der Anlass zur Komposition eines solchen Kanons im strengen Stil. Ein Korrektheitstest eliminiert Dissonanzen separat für jedes Stimmpaar, wie es die Kontrapunktdefinition verlangt:[Kp(17)(26)] Dissonanzen und Quarten sind korrekt als Durchgang (d), Wechselnote (w) und Vorhalt (v) geführt und in den Noten vermerkt. Nebeneinanderstehende Dissonanzen beziehen sich auf zwei korrekte Stimmpaare. Auch verminderte Quinten (♭5) und übermäßige Quarten (♯4), die schon Zarlino als fast konsonant einstufte,[Kp(6)] lösen sich korrekt auf (·····):



Der eingerahmte vollständig bezifferte Bass zeigt, dass auch im dreifachen Kontrapunkt der Oktave eine anspruchsvolle Harmonik mit vielen Dreiklängen, Septakkorden und Quartsextakkorden gestaltet werden kann. Dieser komplexe Kanon wurde schon in der KANONKUNST abgedruckt zusammen mit dem zugehörigen Text:



Literatur

[*K*] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024.

[*MM*] Neumaier, W.: *Musik-Mathematik kurz gefasst*, Heft 1-5:
[*H*] *Unser harmonisches Tonsystem*, 2025
[*N*] *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025.
[*Kp*] *Kontrapunkt oder Komposition*, 2025.
[*Dp*] *Doppelter Kontrapunkt*, 2026.
[*KT*] *Kanontechnik*, 2026.

Download von [*K*][*MM*]: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft

[*SN*] Neumaier, Sabine: *Der doppelte Kontrapunkt in den Permutationsfugen von Johann Sebastian Bach*, Tübingen 1974, Musikwissenschaftliches Institut.

Historische Quellen

[*BA*] Berardi, Angelo: *Ragionamenti Musicali*, Bologna 1681.
https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10598256?page=150,151

[*BC*] Bernhard, Christoph: *Tractatus compositionis augmentatus*:
http://www.bassus-generalis.org/bernhard/bernhard-tractatus.html

[*M*] Marpurg, Friedrich Wilhelm: *Abhandlung von der Fuge*, Berlin 1753.
https://digital.staatsbibliothek-berlin.de/werkansicht?PPN=PPN866422935-&view=overview-toc&PHYSID=PHYS_0190&DMDID=DMDLOG_0001

[*V*] Vicentino, Nicola: *L'antica musica ridotta alla moderna prattica*, Rom 1555, Buch IV, zitiert nach Kapiteln.
https://imslp.org/index.php?title=L%27antica_musica_ridotta_alla_moderna-_prattica_(Vicentino,_Nicola)&oldid=3307859

[*Z*] Zarlino, Gioseffo: *Le Istitutioni harmoniche*, 1558, Teil III, zitiert nach Seitenzahlen.
https://docnum.unistra.fr/digital/collection/coll10/id/1052

Titelbild: Achtfacher Kontrapunkt durch Vicentino-Spiegelungen erzeugt. Symmetrie: Diedergruppe D_2 oder Kleinsche Vierergruppe (auch in jedem Notensystem).

***

Update November 2026