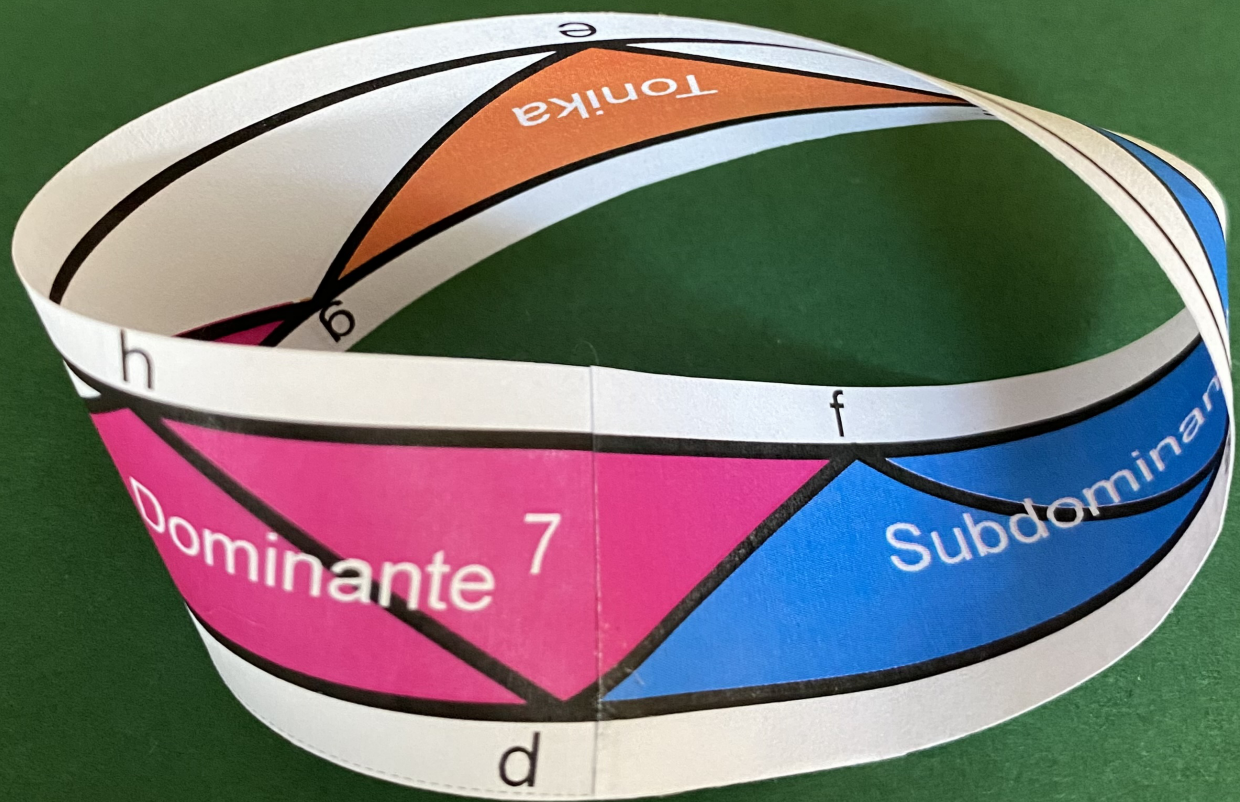


UNSER HARMONISCHES TONSYSTEM



Heft 1
Wilfried Neumaier
September 2025

Musik-Mathematik
kurz gefasst

Die Musikmathematik begann in der Pythagoras-Schule. In ihr wurden Intervalle durch Proportionen von Saitenlängen am Monochord bestimmt. Harmonische Hauptintervalle waren die **Oktave** und **Quinte** mit den einfachsten Proportionen:

- (1) $O := \text{Oktave} := \text{Intervall}(2:1)$
 $Q := \text{Quinte} := \text{Intervall}(3:2)$

Man addiert Intervalle, multipliziert aber deren Proportionen; daher lassen sich die Proportionen addierter, subtrahierter oder vervielfachter Intervalle berechnen mit folgenden Regeln, die schon Philolaos um 500 v. Chr. anwandte:

- (2) $\text{Proportion}(x+y) = \text{Proportion}(x) \cdot \text{Proportion}(y)$
 $\text{Proportion}(x-y) = \text{Proportion}(x) : \text{Proportion}(y)$
 $\text{Proportion}(nx) = \text{Proportion}(x)^n$
 $\text{Proportion}(\text{Intervall}(p)) = p$
 $\text{Quarte} := \text{Oktave} - \text{Quinte} \quad \text{Proportion(Quarte)} = 4:3$
 $\text{Ganzton} := \text{Ton} := \text{Quinte} - \text{Quarte} \quad \text{Proportion(Ton)} = 9:8$
 $\text{diatonischer Halbton} := \text{Quinte} - 3\text{Ton} \quad \text{Proportion(diat. Halbton)} = 256:243$

Eine interessante alternative Musik-Mathematik unabhängig von der Physik schuf Aristoxenos in seinen *Harmonischen Elementen* um 330 v. Chr. Er sah **Intervalle** als musikalische Größen an: als reelle Vielfache der Oktave. Seine experimentelle Intervallmessung mit dem Gehör ergab: $\text{Quinte} = \frac{7}{12}O$, $\text{Ton} = \frac{1}{6}O$ und $\text{Halbton} = \frac{1}{12}O$. Eine Generation später verteidigte Euklid das pythagoreische System und bewies mit Sätzen seiner *Elemente* die Unvereinbarkeit zum System des Aristoxenos. Er postulierte auch einen Zusammenhang zwischen Frequenzverhältnissen und Intervall-Proportionen. Dieser war aber noch lange Zeit keine Erfahrungstatsache. Erst im Jahr 1638 konnte Galileo Galilei diesen Zusammenhang experimentell verifizieren:

- (3) $\text{Frequenz}(x) : \text{Frequenz}(y) = \text{Proportion}(x-y)$

Erst nach der Erfindung der reellen Zahlen und der Logarithmen konnte eine Übersetzung der pythagoreischen Denkweise in die von Aristoxenos allgemein definiert werden, dass daraus die antiken Umrechnungsregeln (2) folgen:

- (4) $\text{Proportion}(rO) := 2^r \quad \text{reelle Zahlen 1585}$
 $\text{Intervall}(p) := (\log_2 p)O \quad \text{nach Huygens 1691}$

Negative Vielfache der Oktave ergeben Intervalle in negativer Richtung mit umgekehrter Proportion. Man bezeichnet sie mit negativem Vorzeichen oder mit einer Vorsilbe als Unter-Intervalle:

- (5) $\text{Unter-}x := -x$
 $\text{Intervall}(x:y) = -\text{Intervall}(y:x)$

Oktave und Quinte erzeugen innerhalb der Intervalle das **Quintsystem**, das eingebettet werden kann in einen rationalen Vektorraum mit der Basis (O,Q), in dem man rechnet wie in der linearen Algebra. Euklids diatonisches Tonsystem

ist ein Teilsystem, modern gesprochen eine A-Moll-Tonleiter über zwei Oktaven, deren Töne um 1000 mit Tonbuchstaben A B C D E F G a b c d e f g a bezeichnet wurden. Diese Notation wurde später etwas modifiziert. Man rückte im deutschen Sprachraum vom Alphabet ab, ersetzte b durch h und ging vom Ton c aus; deshalb liegt die **diatonische Dur-Tonleiter** der heutigen Tonbuchstaben-Definition zugrunde:

- (6) $c := 0$ $d := c + \text{Ton}$ $e := d + \text{Ton}$ $f := c + \text{Quarte}$
 $g := c + Q$ $a := g + \text{Ton}$ $h := a + \text{Ton}$ $c' := c + O$
 $\text{Oktavierung}(x) := \{x + zO \mid z \text{ ist ganzzahlig}\}$ $x' := x + O$ $x^z := x + zO$
 Tonbuchstabe := Oktavierung von c, d, e, f, g, a oder h

Diese Tonleiter heißt diatonisch, weil sie die Quarte von c bis f und von g bis c' melodisch auffüllt durch zwei Töne. Als Restintervall entstehen leittönig wirkende diatonische Halbtöne, wie sich aus den Differenzen ergibt:

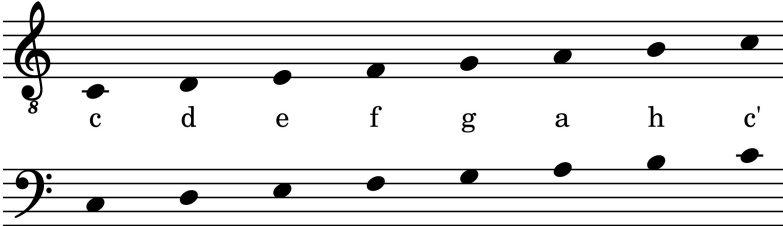
- (7) $\begin{array}{ccccccccccc} c & & d & & e & & f & & g & & a & & h & & c' \\ \hline & \text{Ton} & & \text{Ton} & & \text{diat.} & & \text{Ton} & & \text{Ton} & & \text{Ton} & & \text{diat.} & & \\ & & & & & \text{Halbton} & & & & & & & & \text{Halbton} & & \end{array}$

In der Definition (6) geben Intervalle relativ zum Nullpunkt c die **Tonhöhe** an. Sie wird heute akustisch normiert durch die Frequenz, die sich mit (3) für beliebige Tonhöhen errechnet aus: $\text{Frequenz}(a') = 440\text{Hz}$. Tonbuchstaben ohne hochgestellte Oktavlage repräsentieren **Tonigkeiten**, nämlich Klassen ähnlich klingender Töne verschiedener Oktavlage; sie haben die Form $\text{Oktavierung}(x)$.

Bereits um 1030 führte Guido von Arezzo das **Liniensystem** ein, in dem Linien und Zwischenräume für Tonbuchstaben stehen. Sie werden der Reihe nach den Linien und Zwischenräumen zugeordnet mit zunehmender Tonhöhe von unten nach oben. Die Zahl der Linien pro System lag nicht fest. Heute nimmt man fünf Linien und ergänzt bei Bedarf Hilfslinien oben oder unten. Prinzipiell ist es also unendlich. Die Tonhöhe wird für eine Linie vorgegeben durch einen Tonbuchstaben, den sogenannten **Schlüssel**, aus dem sich die übrigen Tonhöhen des Liniensystems ergeben. Man benutzte primär F und c als Schlüssel und später auch g. Sie werden hier in heutiger stilisierter Form mit markierter Notenlinie definiert:

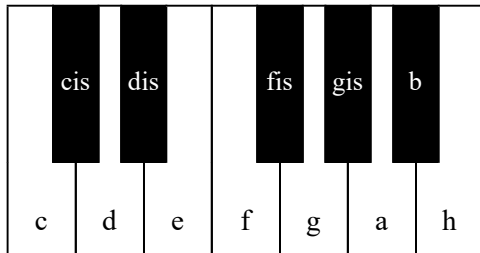
- (8) $\begin{array}{ccccccc} \text{Violinschlüssel} & \text{Alt-/Tenorschlüssel} & \text{Bassschlüssel} & \text{octavierte Schlüssel} \\ \text{g}' & \text{c}' & \text{f} & \text{S}' := \text{S} + O & \text{S}_8 := \text{S} - O \end{array}$

Die diatonische Dur-Tonleiter hat somit im Liniensystem mehrere gleichwertige Schreibweisen in verschiedenen Schlüsseln:

- (9) 

Seit dem Spätmittelalter ist diese Tonleiter auf den weißen Tasten der Klaviatur realisiert. Fünf schwarze Tasten sind chromatische Alterationen, die Nachsilben am Tonbuchstaben oder Vorzeichen vor einer Note oder Notenlinie anzeigen:

(10)



:= chromatischer Halbton := 7Q–4O

#t := tis := t+#

bt := tas := tes := t–#

b := bh

es := be

as := ba

bt := t

bb := bbh

*t := ##t

chromatische Alteration(t) := {t+z#|z ist ganzzahlig}

Stammton(x) := Der Tonbuchstabe t, bei dem x eine chromatische Alteration von t ist

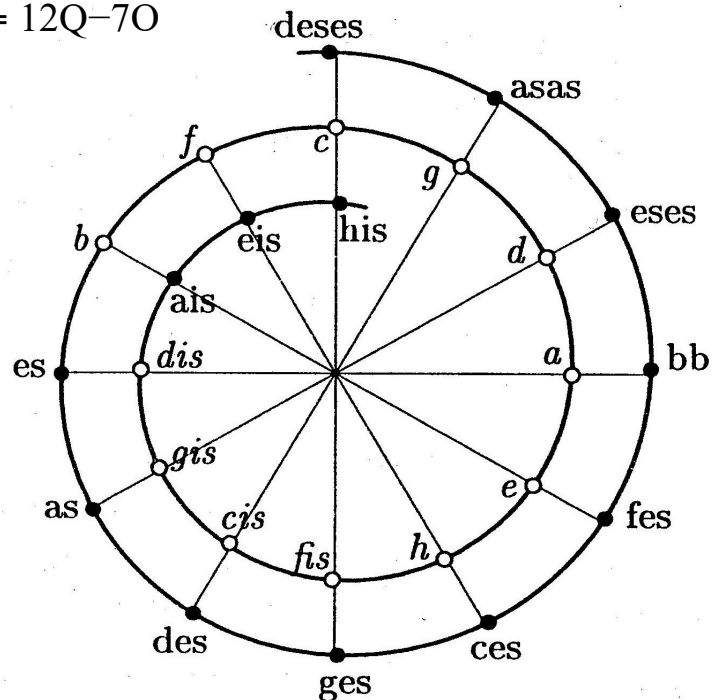
Vorzeichen(x) := x–Stammton(x)

Chromatische Alterationen von Tonbuchstaben erzeugen den **Quintenzirkel**. Dieser repräsentiert die Tonigkeiten des Quintsystems, ist also ein Repräsentantensystem für das Quintsystem modulo O. Der Quintenzirkel ist unendlich, da die Quinte und die Oktave linear unabhängig sind, was schon Euklid mit Sätzen seiner *Elemente* bewies. Der Quintenzirkel schließt sich deshalb nie. Nach zwölf Quinten unterscheiden sich die Töne dis und es um das sogenannte pythagoreische Komma, um etwa $\frac{1}{9}$ Ton. Das veranschaulicht ein graphisch dargestellter Quintenzirkel mit Polarkoordinaten ($7O=360^\circ$ und $Q \approx 30,1^\circ$), in dem die zwölf Klaviertasten als weiße Punkte eingetragen sind:

(11) κ := pythagoreisches Komma := 12Q–7O

κ = dis–es = c–deses = his–c'

$\kappa \approx \frac{1}{9}$ Ton



Weil der Quintenzirkel nicht geschlossen ist, kann man auf einem Klavier mit rein gestimmten Quinten nicht beliebig transponieren: Es ergibt sich bei b–dis eine zu große Pseudoquinte mit einem deutlich hörbaren Fehler von $\frac{1}{9}$ Ton.

In der Renaissance gestattete nur die Laute ein beliebiges Transponieren. Lanfranco, der die Lautenstimmung 1533 erstmals beschrieb, lobte daher dieses Instrument über alles. Die Bünde auf dem Griffbrett der Laute erzwingen nämlich eine **gleichmäßige zwölfstufige Stimmung** mit minimal verkleinerter Quinte, die Aristoxenos einst nutzte: $\zeta(Q) = {}^{7/12}O = Q^{-1/12}\kappa \approx Q^{-1/100}\text{Ton}$. Weil in diesem System das pythagoreische Komma verschwindet, ist das beliebige Transponieren gesichert. Der geschlossene temperierte Quintenzirkel wird durch den Halbton $\zeta(\sharp) = {}^{1/12}O$ erzeugt und hat daher zwölf Tonigkeiten. Diese Stimmung war aber auf Tasteninstrumenten noch lange nicht üblich, obwohl die zwölf Tonigkeiten genau zur Klaviatur (10) gepasst hätten.

In der mehrstimmigen Musik des Spätmittelalters etablierten sich die Terzen als Konsonanzen in Dreiklängen. Man stellte fest, dass die Töne eines reinen Dreiklangs im Verhältnis 6:5:4 stehen. Daher bestimmte Ramis de Pareja 1482 die **reine Terz** nicht mehr diatonisch, sondern über die Proportion 5:4:

$$(12) \quad T := \text{reine Terz} := \text{Intervall}(5:4)$$

Die reine Terz erweitert das Quintsystem zum **Dreiklangssystem**, das in den dreidimensionalen rationalen Vektorraum mit der Basis (O,Q,T) eingebettet werden kann. Denn die reine Terz ist (nach Euklids Satz) linear unabhängig von der Quinte und Oktave und erzeugt deshalb eine neue Dimension. Die reine Terz ist um das syntonische Komma kleiner als die diatonische Terz:

$$(13) \quad \sigma := \text{syntonisches Komma} := 2\text{Ton} - T$$

$$\sigma = 4Q - 2O - T \approx {}^{1/9}\text{Ton}$$

$$\text{Proportion}(\sigma) = 81:80$$

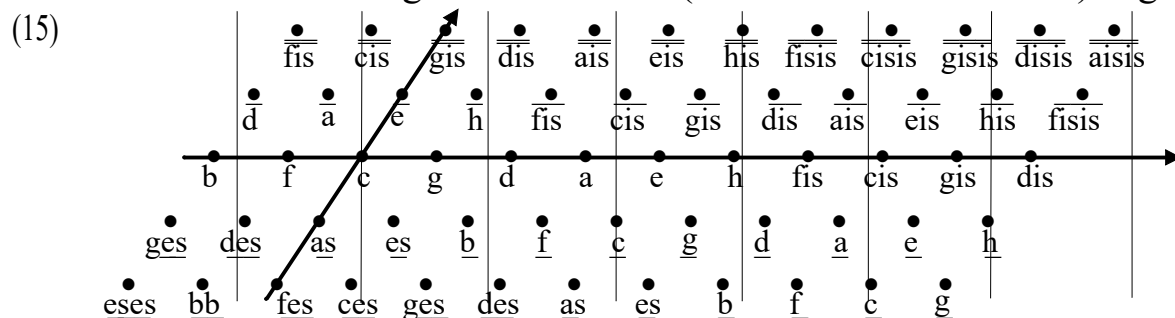
Dieses Mikrointervall erzeugt zusätzliche **Alterationen**: Zu den chromatischen Alterationen kommen auch syntonische Alterationen. Letztere werden exakt notiert durch Striche über oder unter dem Tonnamen gekennzeichnet, wobei der Strich oben die Tonhöhe erniedrigt:

$$(14) \quad \underline{x} := x + \sigma \quad \bar{x} := x - \sigma$$

$$x \text{ mit Alterationen} := \text{Alteration}(x) := \{x + y\sharp + z\sigma \mid y \text{ und } z \text{ sind ganzzahlig}\}$$

$$\text{Tonnamen} := \text{Alteration von einem Tonbuchstaben}$$

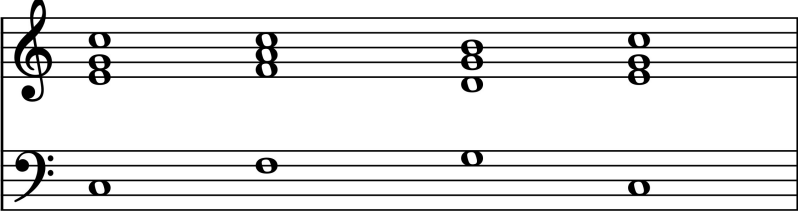
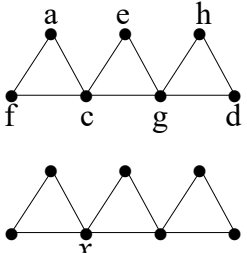
Die Tonigkeiten des Dreiklangsystems werden graphisch dargestellt im sogenannten **Tonnetz**; es hat als horizontale Achse den Quintenzirkel und eine Terz-Achse im Winkel von $56,6^\circ$, bei der die Projektion der Töne auf die Quint-Achse die Tonhöhe bezüglich der Oktave (feine senkrechte Striche) angibt:



Das Tonnetz ist ein Gitter aus lauter Dreiecken; ihre Spitze zeigt bei Dur-Dreiklängen nach oben und bei Moll-Dreiklängen nach unten:

- (16) Durdreiklang:  Molldreiklang: 

Im Dreiklangssystem liegt eine von der melodisch definierten diatonischen Tonleiter abweichende harmonische Interpretation der Tonbuchstaben nahe: die **harmonische Dur-Tonleiter**, die auf drei reinen Dur-Dreiklängen beruht, den Hauptdreiklängen Tonika, Subdominante und Dominante, mit denen die **Haupt-Kadenz** gebildet wird. Die Notenschrift gibt die reine Stimmung nicht wieder; im Tonnetz wird jedoch die typische Form der harmonischen Dur-Tonleiter in beliebigen Tonarten sichtbar:

- (17) 
Tonika Subdominante Dominante Tonika
- 
x-Dur-Hauptdreiklänge

Seit dem Mittelalter orientiert sich die musikalische Terminologie an den **Stufen** der Notenlinien, nicht nur im Quintsystem, sondern auch im erweiterten Dreiklangssystem. Die Stufen repräsentieren jeweils alle Alterationen der diatonischen Töne. Das **Stufensystem** ist daher das Dreiklangssystem modulo $\sharp, \sigma$. Sowohl Tonhöhen und Intervalle werden traditionell nach den Stufen benannt; spezielle Repräsentanten werden dann durch Adjektive genauer differenziert:

- (18)
- | Stufen | Intervall-Repäsentanten mit Proportion |
|-------------------------------|--|
| Prime := c mit Alterationen | reine Prime := 0 1:1
übermäßige Prime := $\sharp$ 2187:2048 |
| Sekunde := d mit Alterationen | große Sekunde := Ton 9:8
kleine Sekunde := Q–3Ton 256:243 |
| Terz := e mit Alterationen | große Terz := T 5:4
kleine Terz := Q–T 6:5 |
| Quarte := f mit Alterationen | reine Quarte := O–Q 4:3
übermäßige Quarte := O–Q+ $\sharp$ 729:512 |
| Quinte := g mit Alterationen | reine Quinte := Q 3:2
verminderte Quinte := Q– $\sharp$ 1024:729 |
| Sexte := a mit Alterationen | große Sexte := O–Q+T 5:3
kleine Sexte := O–T 8:5 |
| Septime := h mit Alterationen | große Septime := Q+2Ton 243:128
kleine Septime := O–Ton 16:9 |
| Oktave := c' mit Alterationen | reine Oktave := O 2:1 |

None := d' mit Alterationen	große None := O+Ton	9:4
	kleine None := O+Q–3Ton	512:243
Dezime := e' mit Alterationen	große Dezime := O+T	5:2
	kleine Dezime := O+Q–T	12:5
Undezime := f' mit Alterationen	reine Undezime := O–Q+T	8:3
Duodezime := g' mit Alterationen	reine Duodezime := O+Q	3:1
	übermäßige x := $x+\sharp$ für reine x oder große x	
	verminderte x := $x-\sharp$ für reine x oder kleine x	

Diese Tabelle erfasst die wichtigsten Proportionen der mehrstimmigen Musik, vor allem die einfachen Proportionen, die bei der Bewertung der Intervalle als Konsonanzen eine Rolle spielen. Diese war historisch nicht konstant, sondern abhängig von Hörgewohnheiten. Nach und nach kristallisierte sich aber eine Bewertung heraus, die 1558 bei Zarlino, dem wichtigsten Musik-Mathematiker der Renaissance, einen für spätere Zeiten maßgeblichen Stand erreichte:

- (19) Als **perfekte Konsonanzen** gelten Oktavierungen der reinen Oktave, reinen Quinte und reinen Quarte. Als **imperfekte Konsonanzen** gelten Oktavierungen der großen und kleinen Terz und großen und kleinen Sexte.

Folgende perfekte Konsonanzen ergeben sich durch Oktavierung:

reine Prime = reine Oktave–O reine Duodezime = reine Quinte+O

reine Unteroktave = reine Oktave–2O

reine Unterquinte = reine Quarte–O reine Unterquarte = reine Quinte–O

Folgende imperfekte Konsonanzen ergeben sich durch Oktavierung:

große Dezime = große Terz+O kleine Dezime = kleine Terz+O

große Unterterz = kleine Sexte–O kleine Unterterz = große Sexte–O

große Untersexta = kleine Terz–O kleine Untersexta = große Terz–O

Akkorde aus lauter Konsonanzen klingen stets harmonisch. Wie man Dissonanzen in ein harmonisches Gefüge einbaut, ist eine Spezialwissenschaft, die historisch sehr differenziert ist und nicht allein vom Tonsystem abhängt. Sie lassen sich jedoch von Konsonanzen abgrenzen:

- (20) Als **Dissonanzen** gelten alle Intervalle, die keine perfekten oder imperfekten Konsonanzen sind.

Dissonanzen sind somit: große und kleine Sekunde, große und kleine Septime, große und kleine None, Oktavierungen von Dissonanzen, Unterintervalle von Dissonanzen, nicht identische chromatische Alterationen von Konsonanzen, speziell der mit der übermäßigen Quarte identische Tritonus $O-Q+\sharp = 3\text{Ton} = h-f$ in der diatonischen Tonleiter.

Dissonanzen haben lauter kompliziertere Proportionen, wie die Tabelle deutlich zeigt. Sie wurden auch nicht harmonisch definiert, sondern melodisch im Tonsystem. Syntonische Alterationen von Kon- und Dissonanzen, die auch dis-

sonant sind, interessieren in der Praxis nicht. Das hat seinen Grund darin, dass das syntonische Komma ein Störintervall ist, das in der Praxis stets eliminiert wird. Der Grund ist leicht einzusehen. Beim Musizieren mit reinen Dreiklängen entstehen nämlich bei erweiterten Kadenzten mit Nebendreiklängen Mikro-Transpositionen um das syntonische Komma, die eine stabile Tonart verhindern. Am Beispiel einer einfachen harmlosen Kadenz in der Notenschrift zeigt eine Analyse mit reinen Dreiklängen im Tonnetz das Problem: Sie beginnt mit einem C-Dur-Dreiklang, endet aber mit einem hörbar tieferen $\bar{C}$ -Dur-Dreiklang:

(21)

The musical notation shows a cadence in C major. The upper staff (treble clef) contains a C4-D4-E4 triad, followed by a C4-D4-E4 triad with a fermata, and then a C4-D4-E4 triad. The lower staff (bass clef) contains a C3-D3-E3 triad, followed by a C3-D3-E3 triad with a fermata, and then a C3-D3-E3 triad. The Tonnetz diagram to the right shows the sequence of triads: C4-D4-E4, G4-A4-B4, F4-G4-A4, C5-D5-E5, and B4-A4-G4. The labels 'c', 'g', 'd', 'a', 'e' are placed above the notes, and 'f', 'c', 'g' are placed below the notes. The diagram is labeled 'von rechts nach links zu lesen' (read from right to left).

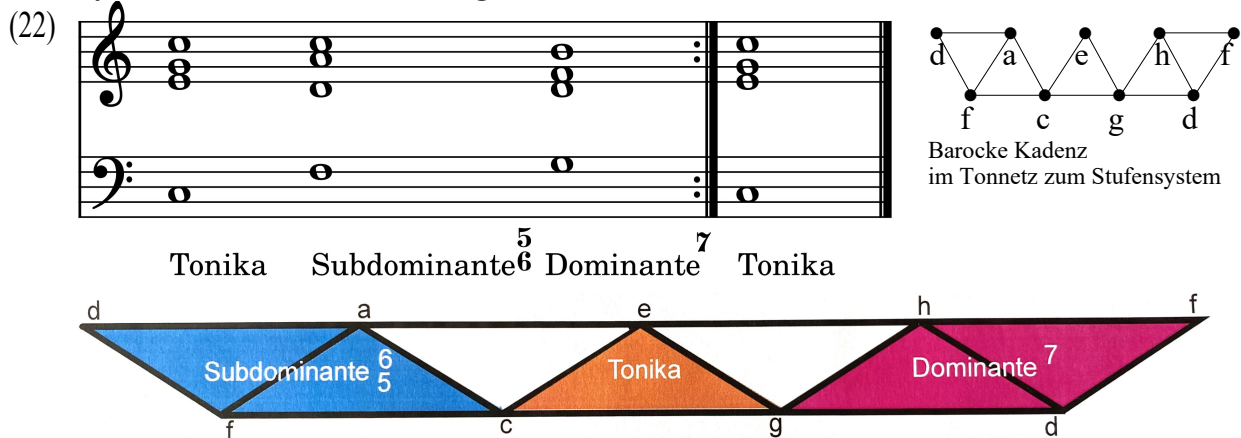
Man löste dieses Kadenzproblem durch **syntonische Stimmungen**, bei denen die Quinte so verkleinert wird, dass das syntonische Komma verschwindet und Kadenzen stabil werden. Das leisten lineare Abbildungen ϑ mit $\vartheta(O)=O$ und $\vartheta(\sigma)=0$. Sie bilden stets die Terz durch $\vartheta(T)=\vartheta(2\text{Ton})=4\vartheta(Q)-2O$ auf ein temperiertes Quintsystem ab, das zum Dreiklangssystem modulo σ isomorph ist. Die Notenschrift passt deshalb zu jedem syntonisch temperierten Tonsystem. Im zugehörigen Tonnetz fallen die Alterationsstriche weg, so dass dort auf jeder Ebene alle Tonigkeiten vertreten sind und die Dreiklänge klar erkennbar sind.

In der Renaissance war auf Tasteninstrumenten die **mitteltönige Stimmung** üblich. Pietro Aaron skizzierte sie 1523 und Zarlino präzisierte sie 1571: Sie ist terzrein $\mu(T)=T$ und oktavrein $\mu(O)=O$ und erfüllt $\mu(\sigma)=0$. Daraus errechnet man $\mu(Q)=Q^{-1/4}\sigma$ und zum Namen mitteltönig passend $\mu(\text{Ton})=1/2T$. Der Fehler der Quinte $\mu(Q)\approx Q^{-1/36}\text{Ton}$ ist gut erträglich, so dass Dreiklänge schön klingen. Leider erzeugt sie einen offenen unendlichen Quintenzirkel und verhindert freies Transponieren: Bei der zwölften Quinte, dem sogenannten Wolf, ergibt sich ein inakzeptabler Fehler: $\mu(b\text{-dis})\approx Q^{7/4}\sigma\approx Q^{1/5}\text{Ton}$. Der mitteltönige Quintenzirkel schließt sich aber nach 31 Quinten bis auf $1/200\text{Ton}$ genau. Das erkannte Nicola Vicentino 1555. Seine Stimmung ist daher praktisch identisch mit der gleichmäßigen 31-stufigen Stimmung, die Huygens 1691 mit Logarithmen berechnete. Vicentino ließ auch mitteltönig gestimmte 31-tönige Archicembali bauen. Sie waren aber für die Praxis zu kompliziert. Darum blieb man auf zwölfstimmigen Instrumenten bei der mitteltönigen Stimmung und nahm das beschränkte Transponieren in Kauf.

Das änderte sich erst im Spätbarock, als man im Orgelbau diverse zwölfstufige **wohltemperierte Stimmungen** erprobte. Werckmeister beschrieb 1691 eine ungleichmäßige Stimmung mit vier mitteltönigen Quinten und sieben reinen Quinten, so dass sich wegen $\sigma\approx 1/9\text{Ton}\approx\kappa$ der Quintenzirkel mit einem Fehler von nur $1/100\text{Ton}$ schließt. Das ergibt eine beinahe mitteltönige C-Dur-Tonleiter

mit allmählichem Übergang im Quintenzirkel zur pythagoreischen Cis-Dur-Tonleiter. Stabile Tonarten und freies Transponieren waren gesichert, da jede zwölfstufige Stimmung das syntonische und das pythagoreische Komma eliminiert. 1698 stufte Werckmeister auch die gleichmäßige zwölfstufige Stimmung mit $\zeta(O)=O$, $\zeta(Q)=\frac{7}{12}O$, $\zeta(T)=\frac{4}{12}O \approx T + \frac{1}{14}T$ als wohltemperiert ein. Der Beiname sagt also nichts darüber aus, ob man ungleichmäßig oder gleichmäßig stimmt. Bach übernahm den Namen im Titel seines Werks *Das Wohltemperierte Klavier*, in dem er das beliebige Transponieren mit zweimal 24 Präludien und Fugen in jeder Dur- und Molltonart demonstrierte. Im 18. Jahrhundert wurden alle älteren Stimmungen durch die gleichmäßige zwölfstufige Stimmung verdrängt. Die Terz klingt dort harmonischer als die scharfe pythagoreische Terz, bewahrt aber die leittönige Wirkung diatonischer Halbtöne.

Diese Leittönigkeit nutzt die **barocke Kadenz** mit zwei typischen Akkorden: Rameaus sixte ajoutée vereinigt die Subdominante mit dem parallelen Moll-dreiklang, und der Dominantseptakkord vereinigt die Dominante mit dem verminderten Dreiklang, dessen Leitton h aufs c der Tonika zielt und dessen Leitton f abwärts aufs e der Tonika zielt. Im Tonnetz zum Stufensystem (modulo $O, \#, \sigma$) erscheinen beide Akkorde als Parallelogramme rechts und links neben der Tonika. In einem farbigen Band sind die Akkorde der barocken Kadenz und ihre symmetrische Anordnung deutlicher zu erkennen:



Die Wiederholung dieser Kadenz verdrillt das Band und verknüpft es an den beiden gemeinsamen Tönen der Parallelogramme. Es entsteht eine interessante symmetrische Struktur: ein sogenanntes Möbiusband, das der Titel abbildet. Auf dem verdrillten Band läuft die unendliche Kadenz im Uhrzeigersinn ab.

Die leittönige Harmonik entwickelte sich immer weiter, besonders stark in der romantischen Musik. Dasselbe gilt auch für die Modulationstechnik: In ihr wurde die leittönige Chromatik voll ausgeschöpft. Sie wurde durch die Verwendung enharmonischer Verwechslungen noch kühner. Enharmonische Modulationen hätten sich ohne wohltemperierte Stimmung nie entwickeln können. Über sie erreicht man schnell entfernte Tonarten. Man nutzt dabei Elemente des

Quintsystems modulo κ , das isomorph zum temperierten zwölfstönigen Ton-system mit eliminiertem κ ist:

(23) enharmonische Verwechslung(x) := $\{x+z\kappa | z \text{ ist ganzzahlig}\}$

Unser harmonisches Tonsystem ist damit mathematisch präzisiert. Es ist die Hauptdimension im Tonraum, den Musiker nutzen. Wer sich für die historischen Wurzeln und Entwicklungen dieser Musik-Mathematik interessiert und Genaueres wissen will, findet es in der Literatur, die teils downloadbar ist.

Die zweite grundlegende musikalische Dimension ist die Zeit. Sie betrifft zeitliche musikalische Strukturen mit Rhythmen und Takten. Sie ist unabhängig vom Tonsystem und wird hier deshalb auch nicht behandelt. In der historisch gewachsenen Form ist sie allen Musikern bestens bekannt. Denn sie arbeiten gewöhnlich in der Kombination beider Dimensionen, im Notensystem, das die Kadenzbeispiele nutzen. Es wird mathematisch genauer dargestellt im zweiten Heft dieser Serie: [UNSER NOTEN- UND TAKTSYSTEM](#).

Beim Komponieren setzen Musiker ihre Fantasie ein und gestalten fantastische Musikstücke in dem Tonraum. Sie nutzen aber auch mathematisch-musikalische Symmetrien in diesem Tonraum, zum Beispiel Wiederholungen, Transpositionen, Umkehrungen, Vergrößerungen und Verkleinerungen. Das geschieht besonders intensiv in der Kanontechnik. Ihre Geschichte und ihre aktuelle komplexe Ausgestaltung vermittelt das Heft [KANONKUNST](#). Dazu ein Beispiel. In einer schlichten Variation der barocken Kadenz (22) verbirgt sich ein komplexer vierstimmiger Fugkanon im barocken kontrapunktischen Stil:

(24)

1. B 2. T 3. A 4. S

Je - sus Chri - stus ist der Herr!

Phil 2,11

Literatur

- [1] Neumaier, W.: *Was ist ein Tonsystem? Eine historisch-systematische Theorie der abendländischen Tonsysteme, gegründet auf die antiken Theoretiker Aristoxenos, Eukleides und Ptolemaios, dargestellt mit Mitteln der modernen Algebra*, Frankfurt am Main, Bern, New York, 1986.
- [2] Neumaier, W.: *Tonsysteme - ein interessantes Kapitel der Musik-Mathematik-Geschichte*, in: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 22, 5-26 (2003). Download: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft
- [3] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024. Download und Hörbeispiele dazu: www.neumaier-wilfried.de/kanonkunst
- [4] Neumaier, W.: *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025. Download: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft



Historische Quellen

- Aaron, Pietro, *Thoscanello de musica*, Venedig 1523, II, Kap. 41.
dazu: [1]220 und [3]17
- Aristoxenos: *Harmonische Elemente*, um 330 v.Chr.
dazu: [1]63-110 und [3]8-12
- Euklid, *sectio canonis*, ed. Menge, Hermann in: *Euclidis opera omnia* 8, 1916, 158-183.
dazu: [1]112+127f+135 und [3]12f+15
- Galilei, Galileo, *Discorsi e dimostrationi matheamtiche intorno a due nuove scienze*, 1638.
dazu: [1]183
- Guido von Arezzo, *Aliae regulae*, in: *Gerbert Scriptores* II, 34.
dazu: [2]15
- Huygens, Christian, *Novus cyclus harmonicus*, in: *opera varia*, Band 2, 745-754.
dazu: [1]179 und [3]18+21
- Lanfranco, Giovanni, *Le scintelle de musica*, Brescia 1533, 132ff.
dazu: [1]182+222f und [3]17f
- Philolaos, Fragment 6, in H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Band I, 1961, 408-410.
dazu: [2]6ff
- Ramis de Pareja: *Musica practica*, Bologna 1482
dazu: [1]215ff und [3]16
- Vicentino, Nicola: *L' antica musica ridotta alla moderna pratica*, Rom 1555, Buch V, Kap.5
dazu: [1]224 und [3]21
- Werckmeister, Andreas: *Musicalische Temperatur*, Quedlinburg 1691, XXI, 57f.
Kurtzer Unterricht, wie man ein Clavier stimmen und wohl temperiren könne, Anhang in: *Werckmeister: Die notwendigen Anmerkungen und Regeln wie der Bassus continuus oder der Generalbaß wol könne tractieret werden*, Aschersleben 1698
dazu: [1]182f+223ff und [3]18+24
- Zarlino, Gioseffo: *Dimostrationi harmoniche*, Venedig 1571, III, Proposta 10f
dazu: [1]187f+221f und [3]18
Le Istitutioni harmoniche, Venedig 1558, besonders III,6f, 17ff, 22f