

**EXTENSIONALE
STANDARDSPRACHE
DER MUSIKTHEORIE:
EINE SCHNITTSTELLE
ZWISCHEN
MUSIK UND INFORMATIK**

Wilfried Neumaier
Rudolf Wille
Mai 1988

Technische Hochschule
Darmstadt, FB Mathematik
Reprint 1141

Wilfried Neumaier und Rudolf Wille

EXTENSIONALE STANDARDSPRACHE DER MUSIKTHEORIE:
EINE SCHNITTSTELLE ZWISCHEN MUSIK UND INFORMATIK

1. Musiktheorie und Informatik

Musiktheorie ist nach [4] die "begriffliche Erfassung und Darstellung musikalischer Sachverhalte". So einfach und klar diese Definition ist, so vielfältig und umstritten sind die Gegenstände und Methoden der Musiktheorie. Seit dem Ursprung musiktheoretischen Denkens in der griechischen Antike sind im weiten Spektrum zwischen spekulativer Theorie und musikalischer Praxis die unterschiedlichsten Ansätze und Denksysteme entstanden. "Inhalte, Methoden und Begriff dessen, was je als Musiktheorie aufgefaßt worden ist, haben sich im Laufe der Geschichte viel zu stark gewandelt, als daß die Frage, was denn ihr 'eigentlicher' Gegenstand sei, eine eindeutige Beantwortung zulassen könnte" [1], so sehen es die Herausgeber der 1986 neu erschienenen Zeitschrift "Musiktheorie" und plädieren deshalb für ein weites und vielseitiges Verständnis von Musiktheorie.

Für C.Dahlhaus ist die moderne Musiktheorie "nach aristotelischen Begriffen eine hybride Disziplin: Als Handwerkslehre ist sie nichts anderes als eine musikalische 'Poietik', gerichtet auf die Herstellung von Gebilden; als Vermittlung von Bildung ist sie 'praktisch' orientiert: sie zielt, durch die Befassung mit Allgemeinem, nicht unmittelbar Verwertbarem, auf ein vom bloßen Berufsinteresse distanzierendes Verhalten; und sofern sie, um ihre Regeln und Dogmen zu rechtfertigen, sich auf ein Stück Naturwissenschaft beruft, partizipiert sie an 'Theorie', allerdings im modernen Sinne: an Theorie nicht als Kontemplation des Grundes der Dinge, sondern als Konstruktion von Gesetzeshypothesen, deren Sinn es ist, Erfahrungen zusammenzufassen, zu erklären und technisch verfügbar zu machen." [2] Da sich für C.Dahlhaus Musiktheorie nicht im Handwerklichen erschöpft und auch nicht vom naturwissenschaftlichen Theoriebegriff vereinnahmt werden kann,

ist für ihn Musiktheorie in erster Annäherung "als sprachliche Fassung des Denkens 'über' sowie des Denkens 'in' Musik zu definieren" [3].

Der Einsatz von Computern im Bereich der Musik setzt immer eine bestimmte Kodierung von Elementen des Musikdenkens voraus und gründet sich damit stets auf ein Stück Musiktheorie. Bemühungen um eine substantielle Verbindung von Musik und Informatik kommen deshalb nicht an einer Auseinandersetzung mit dem weiten und vielfältigen Verständnis von Musiktheorie vorbei. Macht man Musiktheorie wie in der zitierten Definition von C.Dahlhaus auf der sprachlichen Ebene fest, so hat man vor allem die musiktheoretische Fachsprache in ihrem Gebrauch und ihren Bedeutungszusammenhängen in den Blick zu nehmen. Die heterogene Vielfalt in der Musiktheorie drückt sich natürlich auch in ihrer Fachsprache aus, die durch neu hinzukommende Begriffe und Inhalte - vor allem aus der kompositorischen Praxis - immer reichhaltiger wird. Als Möglichkeit der fruchtbaren Auseinandersetzung mit der musiktheoretischen Tradition und Praxis sehen wir die Ausarbeitung eines grundlegenden Sprachrahmens, der als Schnittstelle zwischen Musik und Informatik genutzt werden kann. Dieser Sprachrahmen sollte so weit gesteckt sein, daß in ihm die unterschiedlichen Auffassungen aus der Theoriegeschichte der Musik sowie auch neue musiktheoretische Vorstellungen und Modelle formulierbar sind. Gerade die neuen Erfahrungsfelder, die die vehementen Entwicklungen im Bereich der elektronischen Musikinstrumente und Computer eröffnen, regen das Musikdenken in reichem Maße an und sollten nicht durch einen zu engen Sprachrahmen eingeengt werden.

Es ist hier nicht der Platz, auf die vielfältigen Arbeiten einzugehen, die in den Bereich von Musik und Informatik fallen. Erwähnt sei nur das Buch "Computer Literacy for Musicians" von F.T.Hofstetter [6], in dem der aktuelle Stand der Computer-Musik-Systeme und der Musik-Software referiert wird und weitere Literatur angegeben ist; über laufende Entwicklungen informieren die Zeitschriften "Computer Music Journal" und "Computers & Music". Wichtige Impulse hat die vorliegende Arbeit erhalten von den Erfahrungen mit dem rechnergesteuerten Versuchsinstrument

MUTABOR (= MUTierende Automatisch Betriebene ORgel) [5], das für das Forschungsvorhaben "Mathematische Musiktheorie" an der TH Darmstadt gebaut wurde. Da bei MUTABOR die Tonhöhen erst nach Anschlag der Tasten berechnet werden, kann man über eine normale Klaviatur auf ein nahezu kontinuierliches Spektrum von Frequenzen (ca. 5000 pro Oktave) zugreifen, was durch ein programmiertes Regelsystem, genannt "Stimmungslogik" [21], kontrolliert wird. Es hat sich gezeigt, daß es nicht ausreicht, ein Menü von Stimmungslogiken vorzugeben, denn immer wieder entsteht der Wunsch (besonders bei Komponisten) nach neuen Stimmungen, die erprobt werden sollen und die noch nicht programmiert sind. So wurde an der TH Darmstadt versuchsweise eine Programmiersprache entwickelt, mit der in musiktheoretischen Termini Stimmungslogiken formuliert und in den Steuerrechner eingegeben werden können [9]. Durch das große Interesse, das MUTABOR bei Musikern gefunden hat, sind wir ermuntert worden, ein neues Instrument "MUTABOR II" zu entwickeln, wobei vor allem eine Programmiersprache für Musiker benötigt wird, die das breite Spektrum der Spielmöglichkeiten des Instruments dem Musiker in seinem Denken verfügbar macht [10]. Für diese Programmiersprache wird der im folgenden skizzierte Sprachrahmen die Schnittstelle zwischen Musik und Informatik darstellen.

2. Extensionale Standardsprache

Die Fachsprache der Musiktheorie ist nicht nur zu heterogen, um direkt als Schnittstelle zur Informatik gebraucht werden zu können, sie ist in vielen ihrer Teile auch zu vage und mehrdeutig. Benötigt wird eine exakte Sprache der Musiktheorie, in der Begriffe und Zusammenhänge eindeutig definiert sind. Es ist das zentrale Programm des Forschungsvorhabens "Mathematische Musiktheorie" an der TH Darmstadt, eine solche Sprache in der Form einer "extensionalen Standardsprache" im Sinne von H.Schnelle [15] zu entwickeln. Hierzu heißt es in [19]: "Eine extensionale Standardsprache der Musiktheorie gewinnt man aus der musiktheoretischen Fachsprache durch Explikation der logischen Form und der Begriffe, wobei die radikale Reduktion von Mehrdeutigkei-

ten und Vagheiten angestrebt wird. Die Genauigkeit der Darstellung soll in einer Standardsprache durch systematische Verwendung von Grammatik und Wörtern der Fach- bzw. Gemeinsprache einen derart hohen Grad erreichen, daß die Standardsprache als unmittelbares Übersetzungskorrelat einer logischen Zeichensprache (Konstruktssprache) verstanden werden kann. Besondere Klarheit erhält eine extensionale Standardsprache der Musiktheorie dadurch, daß ihre syntaktischen Ausdrucksgestalten nur Mengen, Elemente von Mengen oder Wahrheitswerte bezeichnen, daß man in ihr also die Begriffe auf ihren Umfang hin expliziert vorfindet und daß die logische Form als Prädikatenlogik bereitsteht."

Die Bemühungen um eine extensionale Standardsprache der Musiktheorie haben ihren ersten Niederschlag in den Arbeiten [18] und [19] gefunden, in denen ein axiomatischer Aufbau einer mathematischen Musiktheorie skizziert wird. In [11] ist dieser Ansatz in Hinblick auf eine geschichtlich fundierte Tonsystemtheorie modifiziert und vertieft worden (s. auch [12]). Erprobt wurde die Standardsprache beim Programmieren von MUTABOR, was den weiteren Ausbau der Sprache angeregt hat. Als Schnittstelle hat sich die extensionale Standardsprache auch bei der Programmierung der elektronischen Graphik-Orgel bewährt, die für die Darmstädter Symmetrie-Ausstellung gebaut wurde (s. [20]). Einen entscheidenden Schub für die Weiterentwicklung hat schließlich das Projekt "MUTABOR II" mit der neu zu entwerfenden Programmiersprache für Musiker gebracht. Dieses Projekt hat zunehmend auch Musiker und Musikwissenschaftler, die zunächst eine exakte Sprache der Musiktheorie nicht für notwendig gehalten haben, von der Nützlichkeit einer extensionalen Standardsprache überzeugt.

In dieser Arbeit müssen wir uns auf eine knappe Einführung in die Standardsprache beschränken und die an sich notwendige Darlegung musiktheoretischer Intentionen bis auf wenige Andeutungen übergehen. Auch auf die vielfältige Literatur, die uns angeregt und beeinflusst hat, kann hier aus Platzgründen nicht eingegangen werden; stellvertretend soll nur der "Entwurf einer mathematischen Musiktheorie" von G.Mazzola [8] erwähnt werden, der ebenfalls auf einem dafür entwickelten computergesteuerten Musikinstrument

erprobt worden ist. In lexikalischer Form soll die extensionale Standardsprache in [13] zugänglich gemacht werden.

3. Tonstrukturen, Tonsysteme und Tonleitern

Als Grundbegriff für den axiomatischen Aufbau der extensionalen Standardsprache wird der Begriff einer Tonstruktur gewählt; darin drückt sich die Auffassung aus, daß Musikdenken primär auf einem Denken in Tönen basiert. Strukturiert werden Töne durch Merkmale, die unterschiedliche Ausprägungen haben können. Die für die Musiktheorie wichtigsten Merkmalsausprägungen sind Zahlen und Größen. Grundlegend als Zahlbereiche sind dabei

- der angeordnete Halbring $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$ der natürlichen Zahlen,
- der angeordnete Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ der ganzen Zahlen,
- der angeordnete Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ der rationalen Zahlen,
- der angeordnete Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen.

Als Größenbereiche treten vor allem die eindimensionalen reellen Vektorräume auf; im folgenden soll deshalb unter einem Größenbereich stets ein von einem Element x erzeugter $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(G, +, \mathbb{R}, x)$ verstanden werden (in [7] werden Größenbereiche allgemeiner als Halbmoduln eingeführt). Die Elemente von G heißen Größen, die ausgezeichnete Größe x heißt Einheit. Gilt $r > s$ in $\mathbb{R}$, so sagt man: die Größe rx ist größer als die Größe sx bzw. die Größe sx ist kleiner als die Größe rx (in Zeichen: $rx > sx$ bzw. $sx < rx$). Das Verhältnis der Größen rx und sx (in Zeichen: $rx:sx$) ist die reelle Zahl $r:s$, falls $s \neq 0$ ist. Musikalisch wichtige Größenbereiche bilden beispielsweise

- die Intervalle mit der Oktave σ als ausgezeichnete Einheit und der Prime ρ als Nullelement,
- die Frequenzen mit der ausgezeichneten Einheit Hertz Hz ,
- die Längen (von Saiten) mit der Monochordlänge Γ als Einheit,
- die Notenwerte mit der ganzen Note $\circ$ als Einheit,
- die Zeiten mit der Zählzeit Ξ als Einheit.

Eine Tonstruktur (T, δ, P) wird definiert als eine Menge T mit einer Abbildung δ von $T \times T$ in den Größenbereich $\mathbb{R}\sigma$, für die

$$\delta(t_1, t_2) + \delta(t_2, t_3) = \delta(t_1, t_3)$$

gilt, sowie einer Menge P von Abbildungen, die T als Definitionsbereich haben. Die Elemente von T heißen Töne, die von P Grundparameter der Tonstruktur. Allgemein werden Abbildungen mit T als Definitionsbereich Tonparameter der Tonstruktur genannt.

Ein Tonparameter h heißt Tonhöhe, wenn $h(t_1) = h(t_2)$ gleichwertig mit $\delta(t_1, t_2) = 0$ ist. $t_1 - t_2 := \delta(t_1, t_2)$ wird das Intervall oder auch die Distanz zwischen t_1 und t_2 genannt; die Elemente von $\delta(T^2)$ heißen die Intervalle der Tonstruktur. Ist $t_1 - t_2 > 0$, so sagt man: " t_1 ist höher als t_2 " und " t_2 ist tiefer als t_1 ". Wenn $t_1 - t_2 = 0$ ist, werden t_1 und t_2 gleichhoch genannt.

Eine Tonstruktur (T', δ', P') ist eine Teilstruktur der Tonstruktur (T, δ, P) , wenn $T' \subseteq T$, δ' die Einschränkung von δ auf $T' \times T'$ und P' eine Menge von Einschränkungen der Parameter aus P auf T' ist; (T, δ, P) soll in diesem Zusammenhang eine Oberstruktur von (T', δ', P') genannt werden. Die freie Erweiterung von (T, δ, P) durch eine (Werte-)Menge X wird definiert als die Tonstruktur $(T \times X, \delta_X, P_X)$, wobei $\delta_X((t_1, x), (t_2, y)) := \delta(t_1, t_2)$, $P_X := \{p' \mid p \in P\} \cup \{q\}$ mit $p'(t, x) := p(t)$ und $q(t, x) := x$ ist.

In der Musiktheorie treten unterschiedliche Arten von Tonstrukturen auf, von denen hier einige im Rahmen der Standardsprache definiert werden sollen. Unter einem Tonsystem wird eine Tonstruktur verstanden, für die das Intervall zwischen verschiedenen Tönen stets ungleich der Prime (dem Nullintervall) ist. Zu jeder Tonstruktur (T, δ, P) hat man ein zugehöriges Tonsystem (T_0, δ_0, P_0) , das man mittels der Äquivalenzrelation Δ_0 mit $t_1 \Delta_0 t_2 :\Leftrightarrow \delta(t_1, t_2) = 0$ erhält: T_0 ist die Faktormenge von T nach Δ_0 , δ_0 ist die von δ induzierte Abbildung auf $T_0 \times T_0$, und die Abbildungen aus P_0 sind von den auf Δ_0 -Klassen konstanten Grundparametern induziert. Als Tonhöhe von (T, δ, P) ergibt sich hier die kanonische Projektion h , die jedem Ton seine Äquivalenzklasse zuordnet. Aus Tonsystemen gewinnt man umgekehrt durch Erweiterung Tonstrukturen. So ist ein Notensystem die freie Erweiterung eines Tonsystems durch eine Menge von Notenwerten. Zentraler Begriff

der Musiktheorie ist das Musikstück, definiert als endliche Tonstruktur, die mindestens zwei der drei Parameter Tonanfang, Tondauer und Tonende als Grundparameter besitzt, die den Tönen jeweils eine Zeit zuordnen, so daß für jeden Ton t gilt:

$$\text{Tonanfang}(t) + \text{Tondauer}(t) = \text{Tonende}(t)$$

In [18] bzw. [19] ist ein Tonsystem als ein Paar (T, h) eingeführt worden, bei dem T eine Tonmenge und die Tonhöhe h eine injektive Abbildung von T in die Menge der positiven reellen Zahlen ist; dabei läßt sich dann die Distanz zwischen zwei Tönen t_1 und t_2 bestimmen als $\log_2(h(t_1):h(t_2))$. Dieser Ansatz soll in den begonnenen Aufbau der extensionalen Standardsprache einbezogen werden, wozu weitere Definitionen benötigt werden. Die Proportion eines Intervalles r wird definiert als die reelle Zahl 2^r ; insbesondere hat die Oktave die Proportion 2, die Prime die Proportion 1. Die Umkehrung der Proportion hat man mit dem Oktav-Logarithmus, der für eine positive reelle Zahl r durch $\mathcal{O}\text{-log}(r) := (\log_2 r)\mathcal{O}$ gegeben ist. Es ist vorteilhaft, allgemein für ein beliebiges Intervall i mit der Proportion s den i-Logarithmus einzuführen durch $i\text{-log}(r) := (\log_s r)i$; sehr häufig benutzt wird der Cent-Logarithmus, wobei Cent das Intervall $(1:1200)\mathcal{O}$ ist. Ein Tonparameter f wird Tonfrequenz genannt, wenn er den Tönen positive Frequenzen zuordnet und wenn die Proportion des Intervalls t_1-t_2 das Frequenzverhältnis $f(t_1):f(t_2)$ ist. Eine Tonstruktur heißt physikalisch, wenn sie eine Tonfrequenz als Grundparameter hat. Die Tonfrequenz ist in einer physikalischen Tonstruktur stets eine Tonhöhe. In [18] ist umgekehrt die Tonhöhe h als Tonfrequenz eingeführt worden, so daß man bei diesem Ansatz durch die Definition $\delta(t_1, t_2) := \log_2(h(t_1):h(t_2))\mathcal{O}$ ein physikalisches Tonsystem erhält. Ein Tonparameter l heißt Saitenlänge, wenn seine Werte positive Längen sind und die Proportion eines Intervalles t_1-t_2 stets das umgekehrte Längenverhältnis $l(t_2):l(t_1)$ ist; ein Tonsystem mit einer Saitenlänge als Grundparameter soll ein Monochordsystem genannt werden.

Eine Tonmenge eines Tonsystems heißt Klang; besteht die Tonmenge aus n Tönen, so wird sie n-Klang genannt. In einer Tonstruktur

(T, δ, P) ist ein Klang eine Tonmenge des zugehörigen Tonsystems (T_0, δ_0, P_0) ; jeder Tonmenge X von (T, δ, P) läßt sich der Klang $h(X)$ zuordnen.

In der Musik ist das Denken in Tonleitern weit verbreitet. Für die Definition des Tonleiterbegriffs wird in der extensionalen Standardsprache vom Begriff der Tonfolge ausgegangen, die als endliche Folge von Tönen einer Tonstruktur verstanden wird. Eine Tonfolge einer Tonstruktur kann offenbar als eine Tonmenge einer freien Erweiterung dieser Tonstruktur durch die natürlichen Zahlen verstanden werden; hierbei kommt die Tonnummer als neuer Grundparameter hinzu. Jeder Tonfolge $F := (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ist eine Intervallfolge $(t_2 - t_1), \dots, (t_k - t_{k-1})$ zugeordnet, die die Schrittfolge von F heißt und deren m -tes Intervall der m -te Schritt von F genannt wird. Im allgemeinen kann ein Schritt in einer Tonfolge positiv, negativ oder eine Prime sein; hat sie nur positive Schritte, so heißt sie steigend, hat sie nur negative Schritte, so heißt sie fallend. Eine Tonleiter wird nun extensional als eine steigende oder fallende Tonfolge definiert; ihre Töne werden Stufen genannt, insbesondere heißt der m -te Ton der Folge m -te Stufe der Tonleiter. Die Schritte der üblicherweise benutzten Tonleitern sind meistens kleiner als eine Vierteloktave. Häufig wiederholt sich die Schrittfolge einer Tonleiter nach einer Oktave; das führt zum Begriff der Oktavtonleiter als einer steigenden Tonleiter, für die es eine natürliche Zahl k gibt so, daß $t_{m+k} - t_m$ stets eine Oktave ist.

4. Transpositionen und Form

Grundlegend für das musikalische Hören ist die menschliche Fähigkeit, ein Musikstück und seine transponierten Formen als gleichartig wahrzunehmen. Transponieren ist nach [4] "das Versetzen eines Musikstücks in eine andere Tonart unter Beibehaltung von Intervallfolge, Rhythmus und Metrum". Bevor das Transponieren in der extensionalen Standardsprache definiert wird, soll eine allgemeinere Klasse von Abbildungen zwischen Tonstrukturen betrachtet werden: Eine Abbildung α zwischen zwei Tonmengen heißt i-

treu, wenn aus $t_1 - t_2 = i$ stets $\alpha(t_1) - \alpha(t_2) = i$ folgt; sie heißt intervalltreu, wenn sie i -treu für jedes Intervall i ist. Bei jeder intervalltreuen Abbildung α ist das Intervall $\alpha(t) - t$ stets konstant und wird das Versetzungsintervall von α genannt. Um die Beibehaltung gewisser Parameterwerte formulieren zu können, wird definiert, daß ein Tonparameter p tonhöhenunabhängig, wenn jede Tonhöhenklasse bei p dieselben Werte hat, d.h. wenn $p([t_1] \triangle_o) = p([t_2] \triangle_o)$ für beliebige Töne t_1 und t_2 ist. Tonhöhenunabhängig ist z.B. der Notenwert in Notensystemen oder die Tonnummer bei Tonfolgen, allgemein jeder neue Grundparameter einer freien Erweiterung einer Tonstruktur. Eine Transposition um i einer Tonstruktur (T, δ, P) wird nun festgelegt als eine intervalltreue Abbildung τ aus T in T mit dem Versetzungsintervall i , für die $p(\tau(t)) = p(t)$ für jeden Ton t aus dem Definitionsbereich von τ und für jeden tonhöhenunabhängigen Grundparameter p gilt. Die Hintereinanderausführung von Transpositionen ist wieder eine Transposition. Die bezüglich der Mengeninklusion größte Transposition der Tonstruktur mit dem Versetzungsintervall i wird, falls sie existiert, mit τ_i bezeichnet; praktisch sind die Schreibweisen $t+i$ für $\tau_i(t)$ und $t-i$ für $\tau_{-i}(t)$. Allgemein gilt $(t+i_1)+i_2 = t+(i_1+i_2)$, falls die auftretenden Transpositionen ausführbar sind.

Als Denkmuster werden solche Tonstrukturen bevorzugt, in denen für jedes Intervall i der Tonstruktur die Transposition τ_i existiert und eine bijektive Abbildung der ganzen Tonmenge auf sich ist; eine derartige Tonstruktur heißt transponierbar. Für transponierbare Tonstrukturen gelten folgende Aussagen:

- Jede Tonstruktur ist Teilstruktur einer transponierbaren Tonstruktur.
- Jedes Tonsystem ist Teilstruktur eines transponierbaren Tonsystems.
- Jede freie Erweiterung einer transponierbaren Tonstruktur ist wieder transponierbar.
- Die Intervalle einer transponierbaren Tonstruktur bilden eine Untergruppe von $(\mathbb{R}\mathbb{Q}, +)$; sie wird durch die Zuordnung $i \mapsto \tau_i$

isomorph auf eine Permutationsgruppe abgebildet, die regulär auf allen Tönen operiert (vgl. [17]).

Eine transponierbare Tonstruktur heißt von X durch I erzeugt, wenn sie die einzige ihrer transponierbaren Teilstrukturen ist, die X als eine Menge von Tönen und I als eine Menge von Intervallen besitzt. Für eine Tonmenge X und eine Intervallmenge I einer transponierbaren Tonstruktur sei $X+I := \{ t+i \mid t \in X \text{ und } i \in I \}$; mit $\langle I \rangle$ wird die von I erzeugte Untergruppe von $(G,+)$ bezeichnet. Die Tonmenge $X+\langle I \rangle$ mit den Einschränkungen der Distanzabbildung und der Grundparameter ist dann eine transponierbare Teilstruktur, die von X durch I erzeugt wird. Die Tonmengen zweier transponierbarer Tonstrukturen, die von X durch I erzeugt werden, lassen sich bijektiv und intervalltreu aufeinander abbilden.

Transponierbare Tonsysteme werden häufig durch eine sie erzeugende Intervallmenge beschrieben. So wird ein Quint-System als ein transponierbares Tonsystem gekennzeichnet, das von einem ausgezeichneten Ton c durch die Oktave und ein ausgezeichnetes Intervall Q, das Quinte heißt, erzeugt wird; dabei gilt für die Quinte $7Q > 4\sigma$ und $5Q < 3\sigma$. Es gibt zwei Typen von Quint-Systemen: die offenen, bei denen das Intervallverhältnis $\sigma:Q$ irrational ist, und die geschlossenen, bei denen $\sigma:Q$ rational ist. In beiden Typen benutzt man Tonnamen, die auf diatonischen Tonleitern basieren. Um dieses in der extensionalen Standardsprache ausdrücken zu können, werden folgende Intervalle eingeführt (durch Wechselwegnahme):

Quarte := Oktave-Quinte (= $\sigma-Q$),

Ganzton := Quinte-Quarte (= $2Q-\sigma$), abgekürzt mit Gt ,

diatonischer Halbton := Quarte-2Ganzton (= $3\sigma-5Q$),

abgekürzt mit Ht ,

chromatischer Halbton := Ganzton-diatonischer Halbton

(= $7Q-4\sigma$), abgekürzt mit # .

Eine diatonische Tonleiter eines Quint-Systems ist eine Oktavtonleiter, deren Schrittfolge mit einer zyklischen Permutation der Intervallfolge Gt,Gt,Ht,Gt,Gt,Gt,Ht beginnt. Spezialfälle sind die Durtonleitern mit der Schrittfolge Gt,Gt,Ht,Gt,Gt,Gt,Ht

und die Molltonleitern mit der Schrittfolge $Gt, Ht, Gt, Gt, Ht, Gt, Gt$. Eine Durtonleiter mit der ersten Stufe t heißt t-Durtonleiter; entsprechend wird von einer t-Molltonleiter gesprochen. Die c-Durtonleiter wird durch folgende Tonbuchstaben benannt: c, d, e, f, g, a, h, c^1 . Die übrigen Töne eines Quint-Systems erhalten ihre Namen über chromatische Alterationen und Oktav-Alterationen; dabei ist allgemein eine I-Alteration für eine Intervallmenge I eine Abbildung zwischen zwei Tonmengen einer Tonstruktur, die jedem Ton t einen Ton aus $t + \langle I \rangle$ zuordnet. Mit den Tonbuchstaben c, d, e, f, g, a, h erhält man folgendermaßen die übrigen Tonnamen für ein Quint-System ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$):

$$\begin{aligned} c(is)^{(n)} &:= c+n\# , & c(es)^{(n)} &:= c-n\# , \\ d(is)^{(n)} &:= d+n\# , & d(es)^{(n)} &:= d-n\# , \\ e(is)^{(n)} &:= e+n\# , & (es)^{(n)} &:= e-n\# , \\ f(is)^{(n)} &:= f+n\# , & f(es)^{(n)} &:= f-n\# , \\ g(is)^{(n)} &:= g+n\# , & g(es)^{(n)} &:= g-n\# , \\ a(is)^{(n)} &:= a+n\# , & (as)^{(n)} &:= a-n\# , \\ h(is)^{(n)} &:= h+n\# , & h(es)^{(n)} &:= h-n\# , \end{aligned}$$

$t^z := t + z\theta$ für $z \in \mathbb{Z}$ und jeden der obigen Tonnamen t (der Exponent 0 wird beim Standardnamen weggelassen); gelesen wird z.B. $c(is)^{(2)}$ als "cisis" und $(es)^{(3)}$ als "eseses" (entsprechend jeder andere Standardname).

Durch diese Namensdefinition erhält jeder Ton eines Quint-Systems genau dann nur einen Tonnamen, wenn es offen ist. Weitere Tonnamen sind allerdings üblich: Man ersetzt in t^{-n} in der Regel den ersten Buchstaben des Tonnamens durch den entsprechenden Großbuchstaben und den Exponenten durch den Index $-n+1$ (der Index 0 wird dabei weggelassen). Statt $c^1, c^2, c^3, \dots$ schreibt man auch $c', c'', c''', \dots$ usw.. Üblicherweise benutzt man den Tonnamen b bzw. B für den Tonnamen hes bzw. Hes .

Ein Quint-System heißt kanonisch, wenn die Proportion der erzeugenden Quinte $3:2$ ist; es ist dann nach obiger Definition ein offenes Quint-System. Ein kanonisches Quint-System wird zu einem kanonischen Quint-Terz-Sytem erweitert, wenn noch die Terz T mit der Proportion $5:4$ zu den erzeugenden Intervallen θ und

Q hinzugenommen wird. Aus diesem Tonsystem erhält man das kanonische Quint-Terz-Sept-System durch Hinzunahme der Naturseptime S mit der Proportion 7:4. Für die Einführung von Tonnamen in den erweiterten Tonsystemen wird das syntonische Komma k_1 durch $k_1 := 4Q - 2\Theta - T$ und das septimale Komma k_2 durch $k_2 := 2\Theta - 2Q - S$ definiert. Für das kanonische Quint-Terz-Sept-System erhält man die Tonnamen durch $t(z_1, z_2) := t + z_1 k_1 + z_2 k_2$ für $t \in c + \langle \Theta, Q \rangle$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Läßt man jeweils die zweite Komponente z_2 weg, so hat man Tonnamen für das kanonische Quint-Terz-System. Jedem Ton der kanonischen Tonsysteme ist so genau ein Tonname zugeordnet, da die Verhältnisse zwischen den Intervallen Θ , Q , T und S alle irrational sind. Die kanonischen Tonsysteme kann man, wie schon L. Euler vorgeschlagen hat, durch mehrdimensionale Gitter veranschaulichen (vgl. [16]).

Zwei Tonmengen einer Tonstruktur haben gleiche Form, in Zeichen: $X \Phi Y$, wenn die eine durch eine Transposition auf die andere abbildbar ist; die Relation Φ ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Form soll verstanden werden als die Abbildung, die einer Tonmenge X die Äquivalenzklasse $[X]_{\Phi}$ zuordnet. Für ein Tonsystem heißen die Äquivalenzklassen von Φ Klangformen; die Form eines Klages K ist somit die Klangform $[K]_{\Phi}$; ist K ein n -Klang, so wird $[K]_{\Phi}$ eine n -Klangform genannt. Die Form zweier Tonfolgen in Tonsystemen ist offenbar genau dann gleich, wenn ihre Schrittfolgen gleich sind. Da jeder n -Klang mit $n \geq 2$ als steigende Tonfolge angeordnet werden kann, können n -Klangformen durch Schrittfolgen steigender Tonfolgen beschrieben werden.

5. Intervalläquivalenzen und Charaktere

Die Tonhöhenwahrnehmung umfaßt neben der "linearen Seite", die sich in der Beziehung "höher-tiefer" ausdrückt, auch eine "zyklische Seite", die häufig durch den Begriff der "Ähnlichkeit von Tönen" beschrieben wird (vgl. [14], S.964). Derartige Ähnlichkeiten werden in der extensionalen Standardsprache als Intervalläquivalenzen definiert: Ist I eine Menge von Intervallen,

so heißen zwei Töne einer Tonstruktur I-äquivalent, in Zeichen: $t_1 \Delta_I t_2$, wenn das Intervall zwischen ihnen in der von I erzeugten Intervallgruppe liegt; die Klassen der Äquivalenzrelation Δ_I , d.h. die Elemente der Faktormenge $T_I := T/\Delta_I$, werden I-Klassen genannt. Von zentraler Bedeutung sind die Oktavklassen, d.h. die Elemente von T_O , die wie in [18] Tonigkeiten heißen sollen. Als Name für eine I-Klasse wird häufig, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, der Name eines ihrer Elemente genommen. So kann man etwa in einem offenen Quint-System die exponentfreien Tonnamen als Namen für die Tonigkeiten wählen.

Ein Tonparameter p einer Tonstruktur heißt I-invariant, wenn p für I-äquivalente Töne denselben Wert annimmt; der gemeinsame p -Wert aller Töne einer I-Klasse kann dann dieser Klasse zugeordnet werden, womit man einen Parameter p_I auf der Faktormenge T_I erhält. Eine Tonhöhe h einer Tonstruktur (T, δ, p) ist z.B. ein prim-invarianter Tonparameter, für den h_O eine Tonhöhe des Tonsystems (T_O, δ_O, p_O) ist. In einem offenen Quint-System liefert die Tonnamenzuordnung $t^Z \mapsto t$ einen oktav-invarianten Tonparameter, der zu der oben angeführten Benennung der Tonigkeiten führt. Ein I-invarianter Tonparameter p heißt I-Retraktion, wenn $p(t) \in T$ ist sowie $p(t)$ und t I-äquivalent sind. Diese Definition besagt, daß eine I-Retraktion allen Tönen einer I-Klasse einen ausgezeichneten Ton dieser I-Klasse zuordnet, d.h. daß sie ein Repräsentantensystem für die I-Klassen auswählt. Ein Tonparameter q heißt I-Akzidens, wenn zu jedem q -Wert w in jeder I-Klasse genau ein Ton t mit $q(t) = w$ existiert. In einem kanonischen Quint-Terz-Sept-System ist die Zuordnung $t^Z(z_1, z_2) \mapsto t^Z(0, 0)$ eine $\{k_1, k_2\}$ -Retraktion p und die Zuordnung $t^Z(z_1, z_2) \mapsto t^Z(z_1, z_2) - t^Z(0, 0)$ ein $\{k_1, k_2\}$ -Akzidens q ; beide zusammen ergeben die Tonhöhe $p+q$, wobei wie üblich $(p+q)(t) := p(t)+q(t)$ definiert ist. In einer transponierbaren Tonstruktur erhält man allgemein zu jeder I-Retraktion p durch die Definition $q(t) := t-p(t)$ ein I-Akzidens q , wobei stets $p+q$ eine Tonhöhe der Tonstruktur ist.

In offenen Quint-Systemen gibt es eine Reihe natürlicher Retraktionen und Akzidentien:

- Die Reduktion der Tonnamen auf ihren ersten Buchstaben liefert eine $\{\sigma, \#\}$ -Retraktion, die Stammton heißt.
- Die Reduktion der Tonnamen auf ihren ersten Tonbuchstaben mit dem hochgestellten Oktavindex liefert eine $\#$ -Retraktion, die diatonische Tonstufe heißt; das zugehörige $\#$ -Akzidens wird Vorzeichen genannt.
- Durch Weglassen des Oktavexponenten bei den Tonnamen erhält man die kanonische Oktav-Retraktion (s.o.); das zugehörige Oktav-Akzidens heißt Oktavlage.

Es gilt nun $t = \text{Stammton}(t) + \text{Vorzeichen}(t) + \text{Oktavlage}(t)$ und $\text{diatonische Tonstufe}(t) = \text{Stammton}(t) + \text{Oktavlage}(t)$. Der Stammklang eines Klanges K ist die Menge $\text{Stammton}(K)$ und der Stammakkord die Menge $\text{diatonische Tonstufe}(K)$. Beim kanonischen Quint-Terz-System bzw. Quint-Terz-Sept-System ist der Stammton eine $\{\sigma, \#, k_1\}$ - bzw. $\{\sigma, \#, k_1, k_2\}$ -Retraktion mit $\{c, d, e, f, g, a, h\}$ als Bild; entsprechend werden die Begriffe "Stammklang" und "Stammakkord" übertragen.

So wie man von einem Ton t zur I-Klasse $[t] \Delta_I$ übergeht, bildet man zu einem Klang K die Menge $[K] \Delta_I := \{[t] \Delta_I \mid t \in K\}$, die der I-Charakter des Klanges K heißt; der I-Charakter ordnet somit jedem Klang die Menge der I-Klassen zu, die mindestens einen Ton des Klanges enthalten. Unter dem I-Charakter eines Tones wird der I-Charakter des 1-Klanges, der aus diesem Ton besteht, verstanden. Der Oktavcharakter eines Tones ist demnach die Tonigkeit, die den Ton enthält. In einem Ton-system heißt der Oktav-Charakter eines Klanges Harmonie. Eine Harmonie ist also eine Menge von Tonigkeiten des Tonsystems; besteht sie aus n Tonigkeiten, so wird von einer n-Harmonie gesprochen. Es ist zu beachten, daß der Oktavcharakter eines n-Klanges keine n-Harmonie zu sein braucht.

Eine Abbildung α zwischen Tonmengen heißt I-zulässig, wenn sie I-äquivalente Töne wieder auf I-äquivalente Töne abbildet; induziert dann eine Abbildung α_I , die I-Klassen wieder I-Klassen zuordnet. Transpositionen sind offenbar stets I-zulässig. Gibt es in einer Tonstruktur zu zwei Mengen X und Y von I-Klassen eine Transposition τ mit $\tau_I(X) = Y$, so wird die

Form von $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ als gleich definiert, in Zeichen: $\underline{X} \Phi_I \underline{Y}$. In einem Tonsystem heißt die Form einer Harmonie Harmonieform, speziell die Form einer n -Harmonie eine n -Harmonieform. Die Harmonieformen eines Tonsystems (T, δ, P) sind demnach die Elemente der Faktormenge T_I / Φ_I , die mit der Faktormenge $T / \Delta_I \vee \Phi$ identifiziert werden kann. In der Harmonielehre tonaler Musik sind Harmonieformen von zentraler Bedeutung; wichtige Beispiele von Harmonieformen sind die Begriffe "Durdreiklang", "Molldreiklang" und "verminderter Septakkord". In transponierbaren Tonsystemen kann man offenbar jede n -Harmonie ($n \geq 1$) durch eine steigende Tonfolge, deren Schritte sich zu einer Oktave aufsummieren, beschreiben und die zugehörige Harmonieform durch die Menge der zyklischen Permutationen ihrer Schrittfolge.

6. Stimmungen und Temperaturen

Tonstrukturen werden häufig anders realisiert, als sie gedacht bzw. notiert sind; Grund hierfür sind meistens Beschränkungen bei den benutzten Musikinstrumenten oder Notationssystemen. Im Tonhöhenbereich werden derartige Veränderungen durch den Begriff "Stimmung" erfaßt, worunter allgemein eine Abbildung von einer Tonstruktur in ein Tonsystem verstanden werden soll. In der Praxis werden solche Stimmungen angestrebt, die die Oktave und andere "wichtige" Intervalle "gut" approximieren; die meisten der bisher angegebenen Stimmungen sind sogar oktavtreu. Den bekanntesten Typ von Stimmungen bilden die sogenannten Temperaturen, die folgendermaßen definiert werden: Eine I-Temperatur ist eine Stimmung, die nicht intervalltreu ist und die zwei Tönen genau dann den gleichen Ton zuordnet, wenn sie I-äquivalent sind. Das Streben nach "guter" Approximation drückt sich bei I-Temperaturen darin aus, daß I eine Menge von "unwichtigen" und "kleinen" Intervallen ist; diese Intervalle werden auch Kommata genannt, eine I-Alteration heißt hier enharmonische Verwechslung.

Die schon erwähnte k_1 -Retraktion des kanonischen Quint-Terz-Systems bzw. $\{k_1, k_2\}$ -Retraktion des Quint-Terz-Sept-Systems auf das kanonische Quint-System ist eine Temperatur, die den

Namen pythagoreische Stimmung hat. Am gebräuchlichsten sind die sogenannten zwölfstufigen Temperaturen; ihre Definition benutzt das pythagoreische Komma k_0 mit $k_0 := 12Q - 7\theta$. Zwölfstufige Temperaturen heißen die oktavtreuen k_0 -Temperaturen des kanonischen Quint-Systems, die oktavtreuen $\{k_0, k_1\}$ -Temperaturen des kanonischen Quint-Terz-Systems und die oktavtreuen $\{k_0, k_1, k_2\}$ -Temperaturen des kanonischen Quint-Terz-Sept-Systems, weil es genau zwölf $\{\theta, k_0, k_1, k_2\}$ -Klassen gibt; das zeigen etwa die Stufen der chromatischen Tonleiter $c, cis, d, es, e, f, fis, g, gis, a, b, h$, die das Bild einer $\{\theta, k_0, k_1, k_2\}$ -Retraktion sind. Häufig werden zwölfstufige Temperaturen ausgehend von dieser chromatischen Tonleiter (oder einer anderen) über die Angabe des Fehlers definiert. Liegen Definitionsbereich und Bild einer Temperatur θ in einem gemeinsamen Tonsystem, dann kann man den Fehler bzgl. θ definieren durch $\text{Fehler}_\theta(t) := \theta(t) - t$, was $\theta(t) = t + \text{Fehler}_\theta(t)$ ergibt.

Heute stehen im Vordergrund die gleichmäßigen Stimmungen θ , für die aus $t_1 - t_2 = t_3 - t_4$ stets $\theta(t_1) - \theta(t_2) = \theta(t_3) - \theta(t_4)$ folgt. Vorherrschend ist die gleichmäßige zwölfstufige Temperatur, die als Bild das Quint-System mit der Quinte $Q := (7:12)\theta$ hat. Gleichmäßig ist auch die pythagoreische Stimmung sowie alle die Stimmungen, die das kanonische Quint-System auf ein anderes Quint-System so abbilden, daß die Tonnamen erhalten bleiben; zu diesen Stimmungen gehören neben der gleichmäßigen zwölfstufigen Temperatur beispielsweise die 19-stufige Temperatur auf ein Quint-System mit $Q := (11:19)\theta$ und die 31-stufige Temperatur auf ein Quint-System mit $Q := (18:31)\theta$, die beide auf ungleichmäßige Vorläufer aus der Renaissance zurückgehen. Die "Güte" derartiger Temperaturen kann man an der Tafel 3 (S.470f) in [16] ablesen.

Auf dem schon erwähnten Instrument MUTABOR wie auch auf anderen automatisch umstimbaren Tasteninstrumenten kann man Musikstücke so realisieren, daß je nach Zusammenhang Tasten unterschiedliche Tonhöhen hervorrufen. In der extensionalen Standardsprache kann dieser Vorgang dadurch beschrieben werden, daß das Musikstück als

Tonstruktur durch eine Stimmung in einem Tonsystem interpretiert wird, wobei Tasten zu verschiedenen Zeiten ggf. verschiedene Töne zugeordnet werden. Allgemein soll eine Stimmung einer Tonstruktur mutierend heißen, wenn es in der Tonstruktur gleichhohe Töne gibt, die die Stimmung auf verschiedene Töne abbildet. Für ein Instrument wie MUTABOR besteht eine Hauptaufgabe darin, Regelsysteme zu entwerfen, die für die Realisierung bestimmter Musikstücke brauchbare mutierende Stimmungen liefern. Wie man zu solchen Regelsystemen (genannt Stimmungslogiken) kommen kann, ist in [9], [10] und [21] ausgeführt.

7. Schlußbemerkung

Die gegebene Einführung in die extensionale Standardsprache der Musiktheorie ist in vieler Hinsicht unvollständig. Es sind fast nur Begriffe behandelt worden, die mit der Tonhöhe zusammenhängen, und selbst das wäre noch erheblich weiter auszuführen. Als wichtige Bereiche kommen Rhythmik, Dynamik und Klangfarbengestaltung hinzu, die ebenfalls in der extensionalen Standardsprache zugänglich sein sollten. Schließlich sind die unterschiedlichen Komponenten musikalischer Komposition aufzubereiten, wozu als ein Ansatz der Mathematisierung die in [8] benutzte Idee eines Atlas von Teilkompositionen vielversprechend erscheint. Insgesamt wird bei allem Drang zur Standardisierung die extensionale Sprache der Musiktheorie immer auch in einem sie verändernden Prozeß zu verstehen sein, da sie für neue Entwicklungen und Ideen stets offen sein sollte.

Literatur

- [1] P.Cahn, H.Danuser, R.Groth, G.Schubert: Zum Geleit. Musiktheorie 1 (1986), 2-3.
- [2] C.Dahlhaus: Musiktheorie. In: C.Dahlhaus (Hrsg.): Einführung in die systematische Musikwissenschaft. Musikverlag H.Gerig, Köln 1971, 93-132.

- [3] C.Dahlhaus: Was heißt "Geschichte der Musiktheorie"? In:
F.Zaminer (Hrsg.): Geschichte der Musiktheorie. Bd.1.
Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1985, 8-39.
- [4] H.H.Eggebrecht (Hrsg.): Meyers Taschenlexikon Musik. Bi-
bliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1984.
- [5] B.Ganter, H.Henkel, R.Wille: MUTABOR - ein rechnergesteu-
ertes Musikinstrument zur Untersuchung von Stimmun-
gen. Acustica 57 (1985), 284-289.
- [6] F.T.Hofstetter: Computer Literacy for Musicians. Prentice
Hall, Englewood Cliffs N.J. 1988.
- [7] A.Kirsch: Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Vanden-
hoeck&Ruprecht, Göttingen 1970.
- [8] G.Mazzola: Gruppen und Kategorien in der Musik - Entwurf
einer mathematischen Musiktheorie. Heldermann Verlag,
Berlin 1985.
- [9] C.Misch: Eine Programmiersprache für MUTABOR und deren
Implementierung. Diplomarbeit, TH Darmstadt, FB In-
formatik 1988.
- [10] C.Misch, R.Wille: Stimmungslogiken auf MUTABOR: eine Pro-
grammiersprache. In: F.R.Herf (Hrsg.): Mikrotöne II.
Edition Helbing, Innsbruck 1988.
- [11] W.Neumaier: Was ist ein Tonsystem? Verlag Peter Lang,
Frankfurt-Bern-New York 1986.
- [12] W.Neumaier: Mathematik und Musikgeschichte. In: R.Wille
(Hrsg.): 2.Darmstädter Tagung über Mathematik und
Musik. Brockmeyer, Bochum 1988.
- [13] W.Neumaier: Deduktives Musiklexikon (in Vorbereitung)

- [14] Riemann Musiklexikon, Sachteil, 12.Auflage. B.Schott's Söhne, Mainz 1967.
- [15] H.Schnelle: Sprachphilosophie und Linguistik. Rowohlt, Reinbek 1973.
- [16] M.Vogel: Die Lehre von den Tonbeziehungen. Verlag systematische Musikwissenschaft, Bonn-Bad Godesberg 1975.
- [17] H.Wielandt: Finite Permutation Groups. Academic Press, New York and London 1964.
- [18] R.Wille: Mathematik und Musiktheorie. In: G.Schnitzler (Hrsg.): Musik und Zahl. Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn-Bad Godesberg 1976, 233-264.
- [19] R.Wille: Mathematische Sprache in der Musiktheorie. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1980, 167-184.
- [20] R.Wille: Symmetrien in der Musik. In: G.Mazzola (Hrsg.): Symmetrie in Kunst, Natur und Wissenschaft, Band 3 - Spiel, Natur und Wissenschaft. Roether Verlag, Darmstadt 1986, 151-155.
- [21] R.Wille: Stimmungslogik. In: R.Wille (Hrsg.): 2. Darmstädter Tagung über Mathematik und Musik. Brockmeyer, Bochum 1988.