Term-Hierarchien

Wilfried Neumaier

WWW: https://neumaier-wilfried.de/logik

Email: dr.w.neumaier@web.de

Version March 27, 2023

Explizite Definitionen erklären neue Terme mit bekannten Termen und haben im Idealfall die Form $a{:=}b$. Oft lassen sich auch implizite Definitionen in diese Idealform umwandeln, so auch transfinite rekursive Definitionen. Dieser Aufsatz zeigt dies an Term-Hierarchien analog zu Neumanns Mengenhierarchie.

Als Basis dient die *Universallogik* [4], ein Logikkalkül, der Ideen von Aristoteles, Leibniz, Boole, Peano, Cantor und Zermelo optimiert. Er beschränkt sich auf ideale explizite Definitionen und hat eine sehr einfache Syntax für Terme, zu denen Begriffe und Aussagen zählen. Basistexte sind die Identität, die Konjunktion, die Negation, das Universum und Klassenterme, jeweils mit definierter Verbalisierung:

Definitionen:

A IST IDENTISCH MIT B := $(A{=}B)$	*Identität*
A UND B := $A{\cdot}B$	*Konjunktion*
NICHT-A := $\neg A$	*Negation*
EXISTENT := I	*Universum*
x MIT f_x := $\{x \mid f_x\}$	*Klassenterm*

Freie Variablen für alle Terme werden stets groß geschrieben.
Gebundene Variablen werden stets klein geschrieben wie x in f_x .

Diese Basistexte erzeugen eine leistungsfähige logische Sprache: Die ganze Mathematiksprache wird in ihr explizit definiert, so dass alle Theoreme aus zwölf kurzen und klaren Axiomen folgen. Dies wird in sieben Abschnitten kurz referiert. Jede von ihnen präsentiert eine logische Sprachebene mit Definitionen und Axiomen der *Universallogik*. Zitiert werden nur Theoreme, die später zur Beschreibung der Hierarchien nötig sind, wobei die Seite des Beweises am Rand als [...] angegeben ist. Quellen zu historischen Bemerkungen sind auch in diesem Buch zu finden.

1 Logik

Aristoteles begründete die Logik und nannte sie Beweiswissenschaft. Er führte erstsmals Schlussregeln ein. Sie werden hier präzisiert mit Ableitungsoperatoren $\vdash$ und $\dashv\vdash$, die in logischen Texten nicht vorkommen.

$a \vdash b$ bedeutet: Ist (jedes) a beweisbar, dann ist auch (jedes) b beweisbar.
$a \dashv\vdash b$ steht für die Regeln $a \vdash b$ und $b \vdash a$.
Metavariablen für Texte haben Serifen (logische Variablen dagegen nicht).

Zwei Schlussregeln von Aristoteles sind grundlegend. Darunter ist der *modus ponens*, der aber nicht die Implikation heutiger Aussagenkalküle verwendet, sondern eine algebraische Implikation, die Leibniz zuerst genau definierte:

Definition:
$(A{\Rightarrow}B) := (A{=}A{\cdot}B)$

Axiome:

$a, a{\Rightarrow}b \vdash b$	*modus ponens*	A1	[38]
$a \vdash a{=}\mathsf{I}$	*Urteil*	A2	[36]

Zur Logik gehört auch ein Identitätsaxiom sowie drei Konjunktionsaxiome, die ein multiplikatives idempotentes Monoid beschreiben, das formal der Zusammensetzung von Begriffen der natürlichen Sprache entspricht:

Definitionen:
$A{\cdot}B{\cdot}C := (A{\cdot}B){\cdot}C$
$A{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}D := (A{\cdot}B{\cdot}C){\cdot}D$ etc.
$A_1 \ldots A_n\ N := (A_1{\cdot} \ldots {\cdot}A_n{\cdot}N)$ für definierte Adjektive $A_1 \ldots A_n$ und Nomen N

Axiome:

$(A{=}B) \Rightarrow (xAy{\Rightarrow}xBy)$	*Identitätsaxiom*	A3	[38]
$\mathsf{I}{\cdot}A = A$	*neutral*	A4	[36]
$A{\cdot}A = A$	*idempotent*	A5	[36]
$A{\cdot}B{\cdot}C = A{\cdot}C{\cdot}B$	*permutativ*	A6	[36]

Diese sechs einfachen Logikaxiome genügen, um alle wichtigen Beweisverfahren abzuleiten, da Schlussregeln, Gleichungen und Implikationen die wesentliche Argumente in Beweisen sind. Die Beweistechnik wird auf vier Seiten der Universallogik [115-118] benutzerfreundlich beschrieben. Sie erlaubt präzise Kalkülbeweise, die üblichen informellen Beweisen entsprechen. Es sind stets lineare Ableitungen als Folge von Termen, zwischen denen Argumente als Indizes eingefügt werden.

Folgende Erklärungen zur Argumentationsweise mögen hier genügen:

- Axiome und Theoreme werden mit ihrem $_{Namen}$ zitiert, Definitionen mit $_{def}$, unterscheidbar am Zeichen, das eliminiert oder eingeführt wird.
- Hypothesen eines Theoreme werden markiert mit $_{hyp,\ hyp1,\ hyp2}$.
- Faktoren bewiesener Terme sind gültig (ihr Produkt ist eine Konjunktion); das gilt auch für den Skopus eines Quantors.
- Unterstrichene Faktoren werden der Reihe nach zitiert als $_{U,\ U1,\ U2,\ \dots}$.
- $_{-Name}$ zeigt das Weglassen eines Faktors an.
- $_{+Name}$ zeigt das Einfügen eines Faktors an.
- $_{>Name}$ zeigt die Anwendung eines Faktors auf einen Term namens $_{Name}$ an.
- $_{B}$ zeigt automatische Beweisschritte in der Booleschen Algebra an, die hier nicht ausgeführt werden.

2 Klassische Logik

Zur klassischen Logik gehört auch die Negation. Mit ihr und der Konjunktion sind alle anderen klassischen Operatoren definierbar. Alle sind für Terme und Aussagen verwendbar, oft werden aber spezielle Symbole und Verbalisierungen gewählt:

Definitionen für Terme and Klassen:	für Aussagen:
WESEN := DING := I	JA := I
0 := ¬I	NEIN := 0
A GESCHNITTEN MIT B := $A \cap B$:= $A \cdot B$	$A \wedge B$:= $A \cdot B$
A VEREINT MIT B := $A \cup B$:= $\neg(\neg A \cdot \neg B)$	A ODER B := $A \vee B$:= $\neg(\neg A \cdot \neg B)$
A OHNE B := $A \setminus B$:= $A \cdot \neg B$	
ALLE A SIND B := $A \subseteq B$:= $(A = A \cdot B)$	A IMPLIZIERT B := $(A \Rightarrow B)$
A IST VERSCHIEDEN VON B := $A \neq B$:= $\neg(A = B)$	
$A \subset B$:= $(A \subseteq B) \cdot (A \neq B)$	

Leibniz charakterisierte die Negation effektiv und elegant durch ein Implikationssynonym, das die logischen Axiomen ergänzt:

Axiom:

$(A = A \cdot B) = (A \cdot \neg B = 0)$ *Negationsregel* A7 [49]

Aus den Axiomen A1-A7 folgen die Regeln klassischer Aussagenkalküle [2] und der booleschen Algebra. Wie Boole kann man somit klassische Theoreme über Terme oder Aussagen automatisch beweisen [127]. Dazu gehören *indirekte* Beweise, Beweise mit *Kontraposition*, *ex falso quodlibet*, *reflexiv* oder anderen bekannten Regeln, die hier ohne ausdrückliches Zitat angewandt werden.

3 Identitätslogik mit Aussagen-Teillogik

Logiker bis hin zu Boole verwendeten Gleichungen und Implikationen nur als Regeln, noch nicht als vollwertige Terme, die in alle Variablen einsetzbar sind. Leibniz war der erste, der dies tat. Zwei seiner Regeln garantieren eine effektive Identitätslogik:

Axiome:

$(A{\neq}B) = ((A{=}B){=}0)$	*Inkoinzidenz*	A8	[49]
$(A{\Rightarrow}B){\cdot}A \Rightarrow B$	*Ersetzregel*	A9	[49]

Theoreme:

$(A{=}B) \Rightarrow (xAy{=}xBy)$	*kongruent*	[128]
$(A{=}B){\cdot}xAy = (A{=}B){\cdot}xBy$	*Tausch*	[128]
$(A{\vee}B){\cdot}(B{\Rightarrow}C) \Rightarrow A{\vee}C$	*disjunktiv*	[129]
$A{\subseteq}A$	*reflexiv*	[130]
$(A{\subseteq}B){\cdot}(B{\subseteq}A){=}(A{=}C)$	*antisymmetrisch*	[131]
$(A{\subseteq}B){\cdot}(B{\subseteq}C){\Rightarrow}(A{\subseteq}C)$	*transitiv*	[130]
$(A{\subset}B){\cdot}(B{\subset}C){\Rightarrow}(A{\subset}C)$	*transitiv*	[131]
$(A{\subset}B){\cdot}(B{\subseteq}C){\Rightarrow}(A{\subset}C)$	*transitiv*	[131]
$0{\subseteq}A \quad A{\subseteq}\mathrm{I}$	*extrem*	[131]
$A{\cdot}B{\subseteq}A, \quad A{\subseteq}A{\cup}B$	*Oberterm*	[130f]
$(A{\subseteq}C){\cdot}(B{\subseteq}C) = (A{\cup}B){\subseteq}C$	*Teilsumme*	[131]

Da Leibniz nichts über Logik veröffentlichte, blieben seine brillanten Ideen fruchtlos, insbesondere seine intelligente Einbettung der Aussagenlogik in die Termlogik durch die Aussagenregel $p{=}(p{=}\mathrm{I})$. Syntaxkonstruktionen für höhere Logiken werden dadurch überflüssig. Die Logik enthält automatisch eine zweiwertige von Gleichungen erzeugte Aussagen-Teillogik [50].

Theoreme:

$p = (p{=}\mathrm{I})$	für Aussagen p	*wahr*	[212]
$\neg p = (p{=}0)$	für Aussagen p	*falsch*	[212]

Da die Termlogik die Konjunktion von Aussagen mit Termen erlaubt, lassen sich bedingte Definitionen mit Fallunterscheidungen, die in üblichen Kalkülen nicht durch eine einzige Gleichung definierbar sind, auch explizit formulieren:

Definition:

$A \text{ FALLS } X \text{ SONST } B := A{\cdot}X{\vee}B{\cdot}\neg X$

Theorem für Definienda δ, Terme a, b und Aussagen p:

$\delta{:=}a \text{ FALLS } p \text{ SONST } b \;\dashv\vdash\; p{\Rightarrow}(\delta{=}a), \neg p{\Rightarrow}(\delta{=}b)$ *bedingt definiert* [132]

4 Klassenlogik

Leibniz bildete Klassen durch Vereinigung von Individuen im Sinn einelementiger Klassen. Peano definierte diese 1889/90 in seinem Klassenkalkül. Seine Regel zum Inhalt von Klassen und eine Regel von Leibniz genügen als Axiome:

Definitionen:

GLEICH $A := \{A\} := \{x|x{=}A\}$
$\{A, B\} := \{A\}\cup\{B\}$
$\{v_1, ..., v_n\} := \{v_1, ..., v_{n-1}\}\cup\{v_n\}$ für $n{>}2$ und Variablen v_1, ..., v_n
A IST IN B := A IST EIN B := A IST B := $A{\in}B := \{A\}{\cdot}B{\neq}0$
$\{x{\in}A|f_x\} := A{\cdot}\{x|f_x\}$
DIE POTENZ VON A := A-KLASSE := $\mathcal{P}A := \{x|x{\subseteq}A\}$

Axiome:

$A{\in}B \Rightarrow \{A\}{\subseteq}B$	*individuell*	A10	[55]
$X{\in}s{=}f_X{\cdot}(X{\in}\mathrm{I}) \dashv\vdash s{=}\{x|f_x\}$	*Inhalt*	A11	[73]

Theoreme:

$A{\in}\mathrm{I} = \{A\}{\neq}0 = A{\in}\{A\}$		*existent*	[132]
$A{\notin}0$		*leer*	[132]
$X{\in}A{\Rightarrow}A{\neq}0$		*nichtleer*	[132]
$A{\in}B{\Rightarrow}A{\in}\mathrm{I}$	$\{x|f_x\} = \{x|f_x{\cdot}(x{\in}\mathrm{I})\}$	*real*	[132]
$(A{\in}B){\cdot}(B{\subseteq}C){\Rightarrow}A{\in}C$		*Syllogismus*	[133]
$X{\in}A{\Rightarrow}X{\in}(A{\cup}B)$		*extensiv*	[133]
$X{\in}(A{\cdot}B){=}(X{\in}A){\cdot}(X{\in}B)$		*distributiv*	[133]
$X{\in}(A{\cup}B){=}(X{\in}A){\vee}(X{\in}B)$		*distributiv*	[133]
$A{\in}\neg B{=}(A{\in}\mathrm{I}){\cdot}(A{\notin}B)$	$X{\in}(A{\setminus}B){=}(X{\in}A){\cdot}(A{\notin}B)$	*Ausnahme*	[133]
$A{\in}\mathrm{I} \Rightarrow (A{\in}\{B\}{=}(A{=}B))$		*gleich*	[134]
$C{\in}X \Rightarrow C{\in}\{v_1, ..., v_n\}{=}(C{=}v_1){\vee}...{\vee}(C{=}v_n)$		*mehrdeutig*	[134]
$v_i{\in}X \Rightarrow v_i{\in}\{v_1, ..., v_n\}$	für ganzzahlige $n{\geq}i{\geq}1$	*aufgezählt*	[134]
$X{\in}\{x|f_x\}{=}(X{\in}\mathrm{I}){\cdot}f_X$	$X{\in}\{x{\in}A|f_x\}{=}(X{\in}A){\cdot}f_X$	*erfüllt*	[140]
$X{\in}a{=}X{\in}b \vdash a{=}b$	$X{\in}a{\Rightarrow}X{\in}b \vdash a{\subseteq}b$	*frei*	[140]
$\{x|a{\cdot}p\}{=}p{\cdot}\{x|a\}$ $\{x|p\}{=}p$	für x-freie Aussagen p	*ungebunden*	[140]
$\mathcal{P}0{=}\{0\}$		*Nullpotenz*	[143]
$\mathcal{P}\{A\}{=}\{0, \{A\}\}$		*Einheitspotenz*	[143]
$\mathcal{P}\{A, B\}{=}\{0, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$		*Paarpotenz*	
$X{\subseteq}Y{\Rightarrow}\mathcal{P}X{\subseteq}\mathcal{P}Y$		*monoton*	[143]

Gebundene Variablen stehen stets für existente Terme mit $x{\in}\mathrm{I}$; nur sie können Elemente sein, aber nie inexistente Terme mit $x{\notin}\mathrm{I}$. Existenzbedingungen $x{\in}\mathrm{I}$ sind daher bei gebundenen Variablen vernachlässigbar. Bei freien Variablen ist jedoch immer die Existenz oder Nichtexistenz zu berücksichtigen. Da die Klassenlogik keine Existenzaxiome hat, sind Beweise im Klassenkalkül elementarer als in der Mengenlehre. Daher werden hier auch triviale oder bekannte Theoreme bewiesen:

Beweis der *Paarpotenz*:

$_{\textit{frei}}\colon X\in\mathcal{P}\{A,B\}\ _{\textit{erfüllt}}\ (\underline{X\in\mathrm{I}})\cdot(X\subseteq\{A,B\})\ _{\textit{def, B}}\ X=X\cdot\{A\}\cup X\cdot\{B\};$
Fall 1 $X=0$: $X=0\ _{\textit{>U1 aufgezählt}}\ X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\};$
Fall 2 $A\in X$, *Fall 3* $B\in X$: $(A\in X)\cdot(B\in X)\ _{\textit{individuell}}\ (\{A\}\subseteq X)\cdot(\{B\}\subseteq X)\ _{\textit{Teilsumme}}$
$\{A\}\cup\{B\}\subseteq X\ _{\textit{def +U2 antisymmetrisch}}\ \{A,B\}=X\ _{\textit{>U1, aufgezählt}}\ X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\};$
Fall ¬*1* $X\neq 0$: *Fall* ¬*2 (analog Fall* ¬*3)*: $A\notin X\ _{\textit{def B}}\ \{A\}\cdot X=0$
$_{\textit{>U3 B}}\ X=X\cdot\{B\}\ _{\textit{def, >Fall ¬1}}\ (X\subseteq\{B\})\cdot(X\cdot\{B\}\neq 0)\ _{\textit{B def}}\ B\in X\ _{\textit{individuell}}$
$\{B\}\subseteq X\ _{\textit{+U4 antisymmetrisch}}\ \{B\}=X\ _{\textit{>U1, aufgezählt}}\ X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\};$
$_{\textit{umgekehrt, frei}}\colon X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\}\ _{\textit{real (def) mehrdeutig}}$
$(\underline{X\in\mathrm{I}})\cdot((X=0)\vee(X=\{A\})\vee(X=\{B\})\vee(X=\{A,B\}))\ _{\textit{>extrem >Oberterm >reflexiv}}$
$_{\textit{(disjunktiv)}}\ (X\subseteq\{A,B\})\vee(X\subseteq\{A\}\cup\{B\})\vee(X\subseteq\{A\}\cup\{B\})\vee(X\subseteq\{A,B\})$
$_{\textit{def, B}}\ X\subseteq\{A,B\}\ _{\textit{+U5 erfüllt}}\ X\in\mathcal{P}\{A,B\}$ ■

Natürlich können beliebige Klassen definiert werden, egal ob sie existieren oder nicht. Auch Russells Klasse, das Paradebeispiel einer inexistenten Klasse, ist ein wohldefinierter Begriff, nützlich, um bedingte Begriffe zu definieren:

Definitionen:

A IST KEIN B := $A\notin B$:= $\neg(A\in B)$
DIE RUSSELL-KLASSE := † := $\{x|x\notin x\}$
A FALLS B := A FALLS B SONST †

5 Definierte Prädikatenlogik

1888 definierte Peano Quantoren explizit in seiner Klassenlogik. Kein späterer Logiker griff seine Idee auf, obwohl sie genial ist und ohne zusätzliche Axiome innerhalb der Aussagenlogik eine effiziente mehrsortige Prädikatenlogik erzeugt mit relativierten Quantoren für beliebige Terme:

Definitionen:

f_x FÜR ALLE x := $\forall x{:}f_x$:= $(\{x|f_x\}=\mathrm{I})$
f_x FÜR ALLE x IN A := $\forall x\in A{:}f_x$:= $\forall x{:}(x\in A\Rightarrow f_x)$
$f_{x,y}$ FÜR ALLE x,y IN A := $\forall x,y\in A{:}f_{x,y}$:= $\forall x{:}\forall y\in A{:}(x\in A\Rightarrow f_{x,y})$
ES GIBT x MIT f_x := $\exists x{:}f_x$:= $(\{x|f_x\}\neq 0)$
ES GIBT x IN A MIT f_x := $\exists x\in A{:}f_x$:= $\exists x{:}((x\in A)\cdot f_x)$

Theoreme für Aussagen f_X und Terme a:

$X{\in}a{\Rightarrow}f_X \vdash \forall x{:}f_x,\ \forall x{\in}a{:}f_x$	*generell*	[138]
$(X{\in}a){\cdot}p{\Rightarrow}f_X \vdash p{\Rightarrow}\forall x{\in}a{:}f_x$	*generell*	[138]
$(X{\in}A){\cdot}\forall x{:}f_x{\Rightarrow}f_X,\ (X{\in}A){\cdot}\forall x{\in}A{:}f_x{\Rightarrow}f_X$	*speziell*	[138]
$(X{\in}A){\cdot}f_X{\Rightarrow}\exists x{:}f_x{\cdot}\exists x{\in}A{:}f_x$	*quantifizieren*	[138]
$\forall x{\in}A{:}f_x{\cdot}\forall x{\in}A{:}h_x = \forall x{\in}A{:}(f_x{\cdot}h_x)$	*∀distributiv*	[139]
$A{\subseteq}B = \forall x{:}(x{\in}A{\Rightarrow}x{\in}B) = \forall x{\in}A{:}(x{\in}B)$	*⊆Synonym*	[141]
$\exists x{:}(x{\in}A){=}(A{\neq}0)$	*nichtleer*	[141]
$\exists x{:}(f_x{\cdot}p) = p{\cdot}\exists x{:}f_x$ für x-frei propositions p	*ungebunden*	[143]

Mit Quantoren kann man viele andere Klassen definieren, etwa die Vereinigung oder Klassen, deren Elemtente durch Terme mit gebundene Variablen beschrieben werden, für die präzise Definitionen Existenzquantoren erfordern:

Definitionen:

$\{T_x|f_x\} := \{y|\exists x{:}(f_x{\cdot}(y{=}T_x))\}$

$\{T_{x,y}|f_{x,y}\} := \{z|\exists x{:}\exists y{:}(f_{x,y}{\cdot}(z{=}T_{x,y}))\}$

DIE VEREINIGUNG ALLER $A := \bigcup A := \{x|\exists y{:}((y{\in}A){\cdot}(x{\in}y))\}$

Theoreme:

$T_X{\in}\{T_x|f_x\}{=}(T_X{\in}\mathrm{I}){\cdot}f_X$	*erfüllt*	[143]
$\bigcup 0{=}0$	*⋃leer*	[144]
$A{\in}\mathrm{I} \Rightarrow \bigcup\{A\}{=}A$	*⋃Einheit*	[144]
$A{\subseteq}B \Rightarrow \bigcup A{\subseteq}\bigcup B$	*⋃monoton*	[144]
$\bigcup(A{\cup}B) = \bigcup A{\cup}\bigcup B$	*⋃Summe*	[144]
$Y{\in}X \Rightarrow Y{\subseteq}\bigcup X$	*⋃Schranke*	[144]
$Y{\in}X{\Rightarrow}(A{\in}\mathcal{P}Y{\Rightarrow}A{\in}\mathcal{P}\bigcup X)$	*Potenzschranke*	

Beweis der *Potenzschranke*:

$_{\textit{hyp2-erfüllt +hyp1-}\bigcup\textit{Schranke}}\ (A{\subseteq}Y){\cdot}(Y{\subseteq}\bigcup X)\ _{\textit{transitiv}}\ A{\subseteq}\bigcup X\ _{\textit{erfüllt (hyp2-real)}}$
$A{\in}\mathcal{P}\bigcup X$ ■

6 Definierte Relationslogik mit Funktionen

1888 führte Peano geordnete Paare für Relationen ein. 1914 definierte Hausdorff Funktionen als eindeutige Relationen. Explizite Definitionen erfordern Peanos Operator ι, der das Element einelementiger Klassen kennzeichnet, und Kuratowskis Paar von 1921. Sie generieren die komplette Funktionsterminologie auf direkte und allgemeine Weise für beliebige Klassen:

Definitionen:

$(A,B) := \{\{A,B\},\{A\}\}$ FALLS $(A{\in}\mathsf{I})\cdot(B{\in}\mathsf{I})$
DAS $A := \imath A := \bigcup A$ FALLS $\exists x{:}(A{=}\{x\})$
DAS F VON $X := F(X) := \imath\{y|(X,y){\in}F\}$
DIE FUNKTION F AUF $A := F{\upharpoonright}_A := \{(x,y)|(x{\in}A)\cdot(y{=}F(x))\}$
DAS BILD VON A UNTER $F := F[A] := \{F(x)|x{\in}A\}$
WERT VON $F := \mathrm{Im}F := F[\mathsf{I}]$
ARGUMENT VON $F := \mathrm{Def}F := \{x|F(x){\in}\mathsf{I}\}$
ABB := ABBILDUNG := $\{f|f{=}f{\upharpoonright}_{\mathsf{I}}\}$
ABBILDUNG VON A NACH $B := A{\longrightarrow}B := \{f{\in}\text{ABB}|(A{=}\mathrm{Def}f)\cdot(f[A]{\subseteq}B)\}$
$F{:}A{\longrightarrow}B := F{\in}(A{\longrightarrow}B)$
IDENTITÄT := Id := $\{(x,y)|x{=}y\}$
$G{\circ}F := \{(x,y)|y{=}G(F(x))\}$

Theoreme (mit dem Existenzaxiom $\{x,y\}{\in}\mathsf{I}$ der Mengenlogik in Abschnitt 7):

$F(X){\in}\mathsf{I}{=}X{\in}\mathrm{Def}F$	*Argument*	[145]
$X{\in}A{\Rightarrow}(F(X){=}F{\upharpoonright}_A(X))$	*wertgleich*	[146]
$\mathrm{Def}(F{\upharpoonright}_A){=}A\cdot\mathrm{Def}F \qquad \mathrm{Im}(F{\upharpoonright}_A){=}F[A]$	*Einschränkung*	[146]
$A{\subseteq}\mathrm{Def}F{=}(A{=}\mathrm{Def}(F{\upharpoonright}_A))$	*Teilfunktion*	
$(F{\upharpoonright}_A){\upharpoonright}_B{=}F{\upharpoonright}_{A\cdot B}$	*doppelt eingeschränkt*	[146]
$F{\upharpoonright}_0{=}0 \qquad F[0]{=}0$	*Leerfunktion*	[147]
$F[\{A\}]{=}\{F(A)\}$	*Einzelbild*	[147]
$F[A{\cup}B]{=}F[A]{\cup}F[B]$	*Bildunion*	[147]
$A{\subseteq}B{\Rightarrow}F[A]{\subseteq}F[B]$	*monoton*	[147]
$\delta := \{(x,y)|y{=}\varphi_x\}$	*Graph*	[148]
$\quad\vdash A{\in}\mathrm{Def}\delta{\Rightarrow}(\delta(A){=}\varphi_A), \;\; \mathrm{Def}\delta{=}\{x|\varphi_x{\in}\mathsf{I}\}$		
$\mathrm{Id}[A]{=}A$	*identisches Bild*	[149]
$(G{\circ}F)[A]{=}G[F[A]]$	*Bild vom Bild*	[149]
$Y{\in}\bigcup F[X]{=}\exists z{\in}X{:}((Y{\in}F(z))\cdot(F(z){\in}\mathsf{I}))$	*Wertelement*	

Beweise:

Teilfunktion:

$A{\subseteq}\mathrm{Def}F \;{}_{def}\; A{=}A\cdot\mathrm{Def}F \;{}_{\textit{Einschränkung}}\; A{=}\mathrm{Def}(F{\upharpoonright}_A)$ ■

Leerfunktion (erste Formel bewiesen in [147]):

$F[0] \;{}_{def}\; \{y|\exists y{:}((y{=}F(x))\cdot(x{\in}0))\} \;{}_{\textit{leer-falsch}}\; \{y|\exists y{:}((y{=}F(x))\cdot 0)\} \;{}_{\textit{ungebunden}}$
$0\cdot\{y|\exists y{:}(y{=}F(x)\} \;{}_{B}\; 0$ ■

Wertelement:

$Y{\in}\bigcup F[X] \;{}_{\textit{erfüllt (2x)}}\; \exists a{:}(\exists z{:}((a{\in}\mathsf{I})\cdot(a{=}F(z))\cdot(z{\in}X))\cdot(Y{\in}a)) \;{}_{\textit{ungebunden}}$
$\exists a{:}\exists z{:}((Y{\in}a)\cdot(a{\in}\mathsf{I})\cdot(a{=}F(z))\cdot(z{\in}X)) \;{}_{\textit{Tausch, ungebunden}}$

$\exists z{:}((Y{\in}F(z)){\cdot}(F(z){\in}\mathrm{I}){\cdot}(z{\in}X))$ $_{def\,(B)}$ $\exists z{\in}X{:}((Y{\in}F(z)){\cdot}(F(z){\in}\mathrm{I}))$ $_{umgekehrt.}$
$_{erfüllt}$ $\exists z{:}((Y{\in}F(z)){\cdot}(F(z){\in}F[X]))$ $_{quantifizieren}$ $\exists z{:}\exists a{:}((Y{\in}a){\cdot}(a{\in}F[X]))$
$_{+real\ ungebunden}$ $(Y{\in}\mathrm{I}){\cdot}\exists a{:}((Y{\in}a){\cdot}(a{\in}F[X]))$ $_{erfüllt}$ $Y{\in}\bigcup F[X]$ ∎

7 Definierte Mengenlogik

Leibniz nutzte eine unformalisierte binäre Mengenlogik in seiner *Monadologie* 1714 [1]. Der erste formalisierte Mengenkalkül ist Peanos *Logique mathématique* von 1897 [6]: Seine Regeln $(A{\in}\mathbb{K}){\cdot}(B{\in}\mathbb{K}){\Rightarrow}A{\cdot}B{\in}\mathbb{K}$, $A{\in}\mathbb{K}{\Rightarrow}\neg A{\in}\mathbb{K}$, $\{A\}{\in}\mathbb{K}$ erzeugen einen komplementären Mengenverband $\mathbb{K}$. Russell und Zermelo nannten seine Logik inkonsistent, da sie dachten, auch die Russell-Klasse existiere in $\mathbb{K}$ [74]. Modelle zeigen jedoch, dass Peanos Logik konsistent ist [83f]. Sein Universum $\mathbb{K}$ und auch das Leibniz-Universum sind explizit definierbar, so dass alle Regeln beweisbar sind [154]. Das geschieht hier in der *Verbalen Logik* [5], dem Grammatikkalkül zu [4], der die aristotelische Termsprache auf ein aktuelles Niveau hebt. Aus verbalen Logiktexten ergeben sich dann per Definition kurze Formeln.

Definitionen:

SINGULÄR := x MIT $\{x\}$ IST EXISTENT
SCHNEIDBAR := x MIT $x{\cdot}y$ IST EXISTENT FÜR ALLE y
NEGIERBAR := x MIT NICHT-x IST EXISTENT
IDEE := x MIT (x IST EINE MENGE = x IST EINE MENGENKLASSE)
$\mathbb{K}$:= SCHNEIDBARE NEGIERBARE SINGULÄRE IDEE

EXTENSIONAL := x MIT $\{x\}$ IST EXISTENT UND $x{\cup}y$ IST EXISTENT FÜR ALLE y
WAHR := GLEICH JA
FALSCH := GLEICH NEIN
BINÄR := x MIT $x{=}x$ IST WAHR UND $x{\neq}x$ IST FALSCH
$\mathbb{L}$:= BINÄRE EXTENSIONALE IDEE

FALSIFIZIERBAR := x MIT $x{\cdot}\neg x$ IST FALSCH
$\mathbb{E}$:= FALSIFIZIERBARE EXTENSIONALE IDEE

Theorems:

BINÄR = $(\mathrm{I}{\in}\{\mathrm{I}\}){\cdot}(0{\in}\{0\}) = (\mathrm{I}{\in}\mathrm{I}){\cdot}(0{\in}\mathrm{I})$	*Binärsynonym*	
FALSIFIZIERBAR = $0{\in}\{0\} = 0{\in}\mathrm{I}$	*Falsifizierbarkeit*	
$\mathbb{K} \vdash 0{\in}\mathrm{I},\ \mathrm{I}{\in}\mathrm{I}$	*reale Bits*	[153]
$\mathbb{K} \vdash A{\in}\mathrm{I}{\Rightarrow}\forall y{:}(A{\cup}y{\in}\mathrm{I}),\ \{A\}{\in}\mathrm{I}$	*extensional*	[154]
$\mathbb{K} \vdash \mathbb{L} \vdash \mathbb{E}$	*wählbares Universum*	

Beweise:

Binärsynonym:

$\mathsf{BINÄR}$ $_{def}$ $\{x|((x=x)\in\{\mathsf{I}\})\cdot((x\neq x)\in\{0\})\}$ $_{reflexiv\text{-}wahr/falsch}$ $\{x|(\mathsf{I}\in\{\mathsf{I}\})\cdot(0\in\{0\})\}$ $_{ungebunden}$ $(\mathsf{I}\in\{\mathsf{I}\})\cdot(0\in\{0\})$ $_{existent}$ $(\mathsf{I}\in\mathsf{I})\cdot(0\in\mathsf{I})$ ■

Falsifizierbarkeit:

$\mathsf{FALSIFIZIERBAR}$ $_{def}$ $\{x|(x\cdot\neg x)\in\{0\}\}$ $_{B,\ ungebunden}$ $0\in\{0\}$ $_{existent}$ $0\in\mathsf{I}$ ■

wählbares Universum:

$\mathbb{K}$ $_{extensional1\ generell}$ $\forall x\in\mathsf{I}:\forall y:(x\cup y\in\mathsf{I})$ $_{+extensional2}$ $\forall x\in\mathsf{I}:((\{x\}\in\mathsf{I})\cdot\forall y:(x\cup y\in\mathsf{I}))$ $_{def,\ B}$ $\underline{\mathsf{EXTENSIONAL}=\mathsf{I}}$; $\mathbb{K}$ $_{def\text{-}Faktoren}$ IDEE $_B$ $\mathsf{I}\cdot\mathsf{IDEE}$ $_{U\ +reale\ Bits}$ $(0\in\mathsf{I})\cdot(\mathsf{I}\in\mathsf{I})\cdot\mathsf{EXTENSIONALE\ IDEE}$ $_{def,\ Binärsynonym}$ $\mathbb{L}$ $_{def\text{-}Faktor\ Falsifizierbarkeit}$ $\mathbb{E}$ ■

Jedes Universum umfasst die Klasse $\mathbb{M}$ aller üblichen Mengen, deren Komplemente keine Mengen sind. Auch sie wird explizit definiert, so dass Mengen auch Urelemente für Objekte unserer Anschauung nach Cantor enthalten können [95]:

Definitionen:

$\mathsf{URELEMENT} := \mathbb{U} := \{x|\neg\exists y\in x:(y\neq x)\}$

$\mathsf{FUNDIERT} := \mathbb{F} := \{x|\forall y\in\mathcal{P}x\setminus\mathbb{U}:((\Cap y\in y)\cdot(y\cdot\Cap y=0))\}$

$\mathsf{POTENZIERBAR} := x$ MIT DIE POTENZ VON x IST EXISTENT

$\mathsf{SUMMIERBAR} := x$ MIT DIE VEREINIGUNG ALLER x IST EXISTENT

$\mathbb{M} := \mathsf{MENGE} :=$ POTENZIERBARES SUMMIERBARES FUNDIERTES DING

Theoreme:

$\mathsf{URELEMENT}=\{x\|(x=0)\cdot(x=\{x\})\}$	*Urelemente*	[180]
ALLE URELEMENTE SIND MENGEN, $\mathbb{U}\subseteq\mathbb{M}$	*primitive Mengen*	[180]

Hier wird das extensionale Universum $\mathbb{E}$ als Prämisse gewählt, da in ihm die Mengenlehre ableitbar ist mit dem Axiom, dass Mengenbilder existieren [110]. Diese werden wie Mengen gehandhabt, da für Mengenbilder analoge Regeln (*) gelten:

Axiom:

$A\in\mathbb{M}\Rightarrow F[A]\in\mathsf{I}$	*Mengenbild* A12	[96]

Definition:

$\mathsf{BILD} := \mathbb{B} := \{f[x]|x\in\mathbb{M}\}$

Theoreme:

$\{A,B\}\in\mathbb{B},\ \{A\}\in\mathbb{B},\ 0\in\mathbb{B},\ \{A\}\in\mathsf{I},\ 0\in\mathsf{I}$	* *elementar*	[178]
$A\in\mathbb{B}\Rightarrow G[A]\in\mathbb{B}$	* *Bildbelegung*	[177]
$(A\subseteq C)\cdot(C\in\mathbb{B})\Rightarrow A\in\mathbb{B}$	* *Teilbild*	[178]
$(A\in\mathbb{B})\cdot(A\subseteq\mathbb{B})\Rightarrow\bigcup A\in\mathbb{B}$	* *Bildvereinigung*	[180/5]
$A\in\mathbb{B}\Rightarrow\mathcal{P}A\in\mathbb{B}$	* *Bildpotenz*	[178]

$A{\in}\mathbb{M}\Rightarrow A{\in}\mathbb{B},\ \mathbb{M}{\subseteq}\mathbb{B}$	*Bildart*	[175ff]
$A{\in}\mathbb{M}\Rightarrow A{\subseteq}\mathbb{M}$	*Mengen von Mengen*	[154]
$A{\in}\mathbb{M}\Rightarrow\neg A{\notin}\mathbb{M},\ \ \mathsf{I}{\notin}\mathbb{M}$	*Nichtmengen*	[164f]
$A{\in}\mathbb{M}\Rightarrow F{\restriction}_A{\in}\mathsf{ABB}$	*Teilabbildung*	[164]
$A{\in}\mathbb{B}\Rightarrow\mathcal{P}A{\neq}F[A]$	*kein Bild*	[*164]

Beweis von *elementar*:

bewiesen [178]: $\{A,A\}{\in}\mathbb{B}$ *def B* $\{A\}{\in}\mathbb{B}$ *+extrem* $(0{\subseteq}\{A\}){\cdot}(\{A\}{\in}\mathbb{B})$ *Teilbild* $0{\in}\mathbb{B}$ *real* ∎

Folgen bildet man üblicherweise durch Abzählen mit Ordinalzahlen. Cantor dehnte diese erstmals ins Transfinite aus. Zermelo gab 1915 die erste präzise Definition der Ordinalzahlen mit einem Zähloperator A' und der Rückwärtszählung $\bigcup A$; seine Definition ist elegant und in eine kurze explizite Form umwandelbar [98]:

Definitionen:

DIE ZAHL NACH $A := A' := A{\cup}\{A\}$

$1{:=}0'\quad 2{:=}1'\quad 3{:=}2'$

ORDINALZAHL $:= \mathbb{O} := \{z{\in}\mathbb{M}\,|\,\forall x{\in}z{:}(x'{\in}z'){\cdot}\forall y{\in}\mathcal{P}z{:}(\bigcup y{\in}z')\}$

FOLGE $:= \{f\,|\,\exists z{\in}\mathbb{O}{:}(f{:}z{\longrightarrow}\mathsf{I})\}$

Theoreme:

$(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(Y{\in}\mathbb{O})\Rightarrow(X{\subset}Y){=}(X{\in}Y)$	*geordnet*	[166]
$Z{\in}\mathbb{O}\Rightarrow Z{\subseteq}\mathbb{O}$	*Zahlenmenge*	[166]
$(Z{\in}X){\cdot}(X{\in}\mathbb{O}){\Rightarrow}(Z{\in}\mathbb{O}){\cdot}(Z{\neq}X){\cdot}(Z{\subseteq}X){\cdot}(Z{=}Z{\cdot}X)$	*Subzahl*	
$(A{\in}\mathbb{O}){\cdot}(B{\in}\mathbb{O})\Rightarrow(A{\subset}B){\vee}(B{\subseteq}A)$	*linear*	[166]
$\mathbb{O}{\notin}\mathsf{I},\ \ \mathbb{O}{\notin}\mathbb{M}$	*Totalität*	[167]
$X{\in}Y\Rightarrow(X{\in}A'{=}(X{\in}A){\vee}(X{=}A))$	*vorher*	[167]
$A{\in}X\Rightarrow A{\in}A'$	*mitgezählt*	[167]
$A{\in}\mathbb{O}\Rightarrow A'{\in}\mathbb{O}$	*zählen*	[168]
$0{\in}\mathbb{O},\ 1{\in}\mathbb{O},\ 2{\in}\mathbb{O},\ 3{\in}\mathbb{O}$	*Zahl*	[169]
$(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(X{\neq}0){\cdot}(X{\neq}1){\Rightarrow}1{\in}X$	*Zahl über 1*	
$A{\in}\mathbb{O}\Rightarrow(\bigcup A{\in}\mathbb{O}){\cdot}(\bigcup(A'){=}A)$	*rückwärts*	[168]
$A{\in}\mathbb{O}\Rightarrow(A{=}\bigcup A){\vee}(A{=}(\bigcup A)')$	*Grenzverhalten*	[168]
$(Z{\in}X){\cdot}(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(X{=}\bigcup X){\Rightarrow}Z'{\in}X$	*Zählgrenze*	
$(Z{\in}\mathbb{O}){\cdot}(Z{\neq}\bigcup Z){\Rightarrow}\bigcup Z{\in}Z$	*Vorgänger*	
$A{\in}\mathbb{O}\Rightarrow A'{\neq}\bigcup(A')$	*Nachfolger*	
$(a{\subseteq}\mathbb{O}){\cdot}(0{\in}a){\cdot}(a{\subseteq}\mathcal{P}a)\vdash$ $(0{\in}K){\cdot}\forall x{\in}a{\cdot}K{:}(x'{\in}K){\cdot}\forall x{\in}a{:}((x{=}\bigcup x){\cdot}(x{\cdot}a{\subseteq}K){\Rightarrow}x{\in}K)\Rightarrow a{\subseteq}K$	*Induktion*	[169]
$f_0,\ X{\in}\mathbb{O}{\Rightarrow}(f_X{\Rightarrow}f_{X'}){\cdot}((X{=}\bigcup X){\cdot}\forall z{\in}X{:}f_z{\Rightarrow}f_X)$ $\vdash\forall x{\in}\mathbb{O}{:}f_x,\ \ X{\in}\mathbb{O}{\Rightarrow}f_X$	*transfinite Induktion*	

$\forall x{\in}\mathbb{O}{:}(x{\subseteq}K{\Rightarrow}x{\in}K){\Rightarrow}\mathbb{O}{\subseteq}K$ *transfinite Klasse* [169]
$F{\in}\mathsf{FOLGE} \Rightarrow \mathrm{Def}F{\in}\mathbb{O}$ *Zahlargumente* [171]
$(F{\in}\mathsf{FOLGE}){\cdot}(Y{\in}\mathsf{I}){\cdot}(G{=}F{\cup}\{(\mathrm{Def}F,\,Y)\}) \Rightarrow$ *Fortsetzung* [172]
$(G{:}\mathrm{Def}F'{\longrightarrow}\mathsf{I}){\cdot}(G{\in}\mathsf{FOLGE}){\cdot}\forall x{\in}\mathrm{Def}F{:}(F(x){=}G(x)){\cdot}(Y{=}G(\mathrm{Def}F))$

Beweise:

Subzahl: $_{\textit{hyp2-Zahlenmenge}}\ X{\subseteq}\mathbb{O}\ _{\textit{+hyp1 Syllogismus}}\ Z{\in}\mathbb{O}\ _{\textit{geordnet (hyp1+2)}}\ Z{\subset}X\ _{\textit{def}}$
$(Z{\neq}X){\cdot}(Z{\subseteq}X)\ _{\textit{def}}\ Z{=}Z{\cdot}X$ ■

Zahl über 1: $_{\textit{linear def (hyp1)}}\ (X{\subset}1){\vee}(1{\subset}X){\cdot}(X{\neq}1)\ _{\textit{-hyp3, geordnet}}\ (X{\in}1){\vee}(1{\in}X)$
$_{\textit{def}}\ (X{\in}\{0\}){\vee}(1{\in}X)\ _{\textit{gleich (hyp1-real)}}\ (X{=}0){\vee}(1{\in}X)\ _{\textit{hyp2-falsch}}\ 0{\vee}(1{\in}X)\ _{B}\ 1{\in}X$ ■

Zählgrenze $_{\textit{indirekt}}$: $Z'{\notin}X\ _{\textit{geordnet (hyp1+2 Subzahl zählen)}}$
$Z'{\not\subset}X\ _{\textit{falsch>linear}}\ X{\subseteq}Z'\ _{\bigcup\textit{monoton}}\ \bigcup X{\subseteq}\bigcup Z'\ _{\textit{hyp3, rückwärts (Subzahl) +Subzahl}}$
$(X{\subseteq}Z){\cdot}(Z{\subseteq}X){\cdot}(Z{\neq}X)\ _{\textit{antisymmetrisch}}\ (X{=}Z){\cdot}(Z{\neq}X)\ _{B}\ 0$ ■

Vorgänger:
$_{\textit{Subzahl (hyp1)}}\ Z{\in}\mathbb{O}\ _{\textit{Grenzverhalten}}\ (Z{=}\bigcup Z){\vee}(Z{=}(\bigcup Z)')\ _{\textit{+hyp3 B}}\ \underline{Z{=}(\bigcup Z)'}$
$_{\textit{hpy1 rückwärts}}\ \bigcup Z{\in}\mathbb{O}\ _{\textit{mitgezählt}}\ \bigcup Z{\in}(\bigcup Z)'\ _{U}\ \bigcup Z{\in}Z$ ■

Nachfolger:
$A{\in}\mathbb{O}\ _{\textit{mitgezählt, zählen}}\ (A{\in}A'){\cdot}(A'{\in}\mathbb{O})\ _{\textit{Subzahl}}\ A'{\neq}A\ _{\textit{rückwärts (hyp)}}\ A'{\neq}\bigcup(A')$ ■

(1) $\mathbb{O}{\subseteq}\mathcal{P}\mathbb{O}\ _{\textit{frei}}$: $X{\in}\mathbb{O}\ _{\textit{real +Zahlenmenge}}\ (X{\in}\mathsf{I}){\cdot}(X{\subseteq}\mathbb{O})\ _{\textit{erfüllt def}}\ X{\in}\mathcal{P}\mathbb{O}$ ■

transfinite Induktion mit $K{:=}\{x|f_x\}$:
$_{\textit{(generell)}}{:}\ _{\textit{Prämisse2>hyp}}\ (f_X{\Rightarrow}f_{X'}){\cdot}((X{=}\bigcup X){\cdot}\forall z{\in}X{:}f_z{\Rightarrow}f_X)\ _{\textit{def satified}}$
$(X{\in}K{\Rightarrow}X'{\in}K){\cdot}((X{=}\bigcup X){\cdot}\forall z{\in}X{:}z{\in}K{\Rightarrow}X{\in}K)\ _{\textit{+hyp-distributiv, +Subzahl-distributiv}}$
$\underline{(X{\in}\mathbb{O}{\cdot}K{\Rightarrow}X'{\in}K)}{\cdot}((X{=}\bigcup X){\cdot}\forall z{\in}X{\cdot}\mathbb{O}{:}z{\in}K{\Rightarrow}X{\in}K)\ _{\subseteq\textit{Synonym}}$
$(X{=}\bigcup X){\cdot}(X{\cdot}\mathbb{O}{\subseteq}K){\Rightarrow}X{\in}K\ _{\textit{generell (hyp) +Prämisse1 +U-generell}}$
$(0{\in}K){\cdot}\forall x{\in}\mathbb{O}{\cdot}K{:}(x'{\in}K){\cdot}\forall x{\in}\mathbb{O}{:}((x{=}\bigcup x){\cdot}(x{\cdot}\mathbb{O}{\subseteq}K){\Rightarrow}x{\in}K)$
$_{\textit{Induktion (reflexiv, Zahl, (1))}}\ \mathbb{O}{\subseteq}K\ _{\textit{hyp Syllogismus}}\ X{\in}K\ _{\textit{def erfüllt}}\ f_X$ ■

8 Explizite rekursive Definitionen

Eine explizite rekursive Definition vereinigt Folgen mit gleicher Rekursionsregel. Ist diese Vereinigung eine Folge, so ist die Rekursion nicht transfinit, sondern hört bei einer Zahl auf. Im transfiniten Fall ist diese Vereinigung aber auf allen Ordinalzahlen definiert und ist dann keine Folge und keine Menge. Zum Beweis der Transfinität genügt es zu zeigen, dass der Rekursionswert für beliebige Ordinalzahlen existiert:

Theoreme für Terme φ_F, γ_F, Γ, δ:

$\gamma_F := \forall z\in \mathrm{Def}F{:}(F(z)=\varphi_{F\restriction_z})$	*Rekursionsregel*	
$\Gamma := \{f\in\mathsf{FOLGE}\mid\gamma_f\}$	*rekursive Funktionen*	
$\delta := \bigcup\{f\in\mathsf{FOLGE}\mid\forall z\in\mathrm{Def}f{:}(f(z)=\varphi_{f\restriction_z})\}$	*rekursive Definition*	
$\vdash X\in\mathrm{Def}\delta \Rightarrow \delta(X)=\varphi_{\delta\restriction_X}$	*Rekursion*	[173]
$\mathrm{Def}\delta=\{x\in\mathbb{O}\mid\exists f\in\Gamma{:}(x\in\mathrm{Def}f)\}$	*rekursive Argumente*	[173]
$(X\in\mathbb{O})\cdot(X\subseteq\mathrm{Def}\delta)\Rightarrow\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathsf{I}$	*Realwerte (Prämisse)*	
$\vdash X\in\mathbb{O} \Rightarrow (\delta(X)=\varphi_{\delta\restriction_X})$	*transfinite Rekursion*	
$\mathrm{Def}\delta=\mathbb{O}$	*Transfinität*	
$\mathrm{Def}\delta\notin\mathsf{I}$, $\mathrm{Def}\delta\notin\mathbb{M}$	*Totalität*	
$X\in\mathbb{O} \Rightarrow (X=\mathrm{Def}\delta\restriction_X)\cdot(\delta(X)\in\mathsf{I})$	*Teilrekursion*	

Beweise mit $\boldsymbol{G}{:=}\delta\restriction_X\cup\{(X,\varphi_{\delta\restriction_X}\}$:

(1) $(X\in\mathbb{O})\cdot\gamma_F\Rightarrow\gamma_{F\restriction_X}$ *γ-generell*: $Z\in\mathrm{Def}(F\restriction_X)$ *Einschränkung* $Z\in X\cdot\mathrm{Def}F$ *distributiv +hyp2-def* $(\underline{Z\in X})\cdot(Z\in\mathrm{Def}F)\cdot\forall z\in\mathrm{Def}F{:}(F(z)=\varphi_{F\restriction_z})$ *Subzahl(hyp1) speziell* $(Z=Z\cdot X)\cdot(F(Z)=\varphi_{F\restriction_Z})$ *Tausch B* $F(Z)=\varphi_{F\restriction_{X\cdot Z}}$ *wertgleich(U), doppelt eingeschränkt* $F\restriction_X(Z)=\varphi_{F\restriction_X\restriction_Z}$ ■

(2) $(X\in\mathbb{O})\cdot(X\subseteq\mathrm{Def}\delta) \Rightarrow (\delta\restriction_X\in\mathsf{FOLGE})\cdot\gamma_{\delta\restriction_X}$: *hyp1 erfüllt* $X\in\mathbb{M}$ *Teilabbildung, Teilfunktion (hyp2) +extrem* $(\delta\restriction_X\in\mathsf{ABB})\cdot(X=\mathrm{Def}(\delta\restriction_X))\cdot(\delta[X]\subseteq\mathsf{I})$ *def erfüllt* $\delta\restriction_X{:}X\to\mathsf{I}$ *def-erfüllt (hyp1)* $\delta\restriction_X\in\mathsf{FOLGE}$; *Rekursion* $X\in\mathrm{Def}\delta\Rightarrow(\delta(X)=\varphi_{\delta\restriction_X})$ *generell, def* γ_δ *hyp1 (1)* $\gamma_{\delta\restriction_X}$ ■

(3) $(X\in\mathbb{O})\cdot(G(X)=\varphi_{\delta\restriction_X})\cdot\forall z\in X{:}(G(z)=\varphi_{\delta\restriction_z}) \Rightarrow \forall z\in X'{:}(G(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})$: *generell*: $Z\in X'$ *vorher* $(Z\in X)\vee(Z=X)$ *hyp3-speziell disjunktiv, >hyp2 disjunktiv* $(G(Z)=\varphi_{\delta\restriction_Z})\vee(G(Z)=\varphi_{\delta\restriction_Z})$ *B* $G(Z)=\varphi_{\delta\restriction_Z}$ ■

(4) $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(X\subseteq\mathrm{Def}\delta\Rightarrow X\in\mathrm{Def}\delta)$: *(2), Realwerte (hyp1+2)* $\underline{(\delta\restriction_X\in\mathsf{FOLGE})}\cdot\underline{\gamma_{\delta\restriction_X}}\cdot\underline{(\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathsf{I})}$ *Teilfunktion(hyp2)* $X=\mathrm{Def}\delta\restriction_X$ *>U2-def, >Fortsetzung (U1, U3, def)* $\underline{\forall z\in X{:}(\delta\restriction_X(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})}$ $\cdot(\boldsymbol{G}{:}X'\to\mathsf{I})\cdot(\underline{\boldsymbol{G}\in\mathsf{FOLGE}})\cdot\underline{\forall z\in X{:}(\delta\restriction_X(z)=\boldsymbol{G}(z))}\cdot\underline{(\varphi_{\delta\restriction_X}=\boldsymbol{G}(X))}$ *def-erfüllt* $\underline{\mathrm{Def}\boldsymbol{G}=X'}$ *>mitgezählt (hyp1)* $\underline{X\in\mathrm{Def}\boldsymbol{G}}$ *U4+6 ∀distributiv, Tausch* $\forall z\in X{:}(\boldsymbol{G}(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})$ *+U7, (3)* $\forall z\in X'{:}(\boldsymbol{G}(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})$ *U8 def* γ_G *+U5 erfüllt* $\boldsymbol{G}\in\Gamma$ *+U9 quantifizieren* $\exists f\in\Gamma{:}(X\in\mathrm{Def}f)$ *+hyp1 erfüllt* $X\in\{x\in\mathbb{O}\mid\exists f\in\Gamma{:}(x\in\mathrm{Def}f)\}$ *rekursive Argument* $X\in\mathrm{Def}\delta$ ■

Transfinität, Totalität:

(4) $\forall x\in\mathbb{O}{:}(x\subseteq\mathrm{Def}\delta\Rightarrow x\in\mathrm{Def}\delta)$ *transfinite Klasse* $\underline{\mathbb{O}\subseteq\mathrm{Def}\delta}$ *rekursive Argumente def* $\mathrm{Def}\delta=\mathbb{O}\cdot\{x\mid\exists f\in\Gamma{:}(x\in\mathrm{Def}f)\}$ *>Oberterm* $\mathrm{Def}\delta\subseteq\mathbb{O}$ *antisymmetrisch (U)* $\mathbb{O}=\mathrm{Def}\delta$ *>Totalität für* $\mathbb{O}$ $\mathrm{Def}\delta\notin\mathsf{I}$, $\mathrm{Def}\delta\notin\mathbb{M}$ ■

transfinite Rekursion, Teilrekursion:

hyp +Zahlenmenge $(X\in\mathbb{O})\cdot(X\subseteq\mathbb{O})$ *Transfinität* $(X\in\mathrm{Def}\delta)\cdot(X\subseteq\mathrm{Def}\delta)$ *Rekursion, Teilfunktion Realwerte (hyp)* $(\delta(X)=\varphi_{\delta\restriction_X})\cdot(X=\mathrm{Def}\delta\restriction_X)\cdot(\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathsf{I})$ *Tausch* $\delta(X)\in\mathsf{I}$ ■

Häufig sind transfinite Rekursionen mit Regeln für Nachfolger- und Grenzzahlen:

Theoreme für Terme λ_F, σ_F und die *rekursive Definition* von δ mit folgendem φ_F:	
$\varphi_F := \sigma_F$ FALLS $\mathsf{Def}F \neq \bigcup \mathsf{Def}F$ SONST λ_F	
Realwerte $\vdash X \in \mathbb{O} \Rightarrow \delta(X') = \sigma_{\delta \restriction X'}$	*Folgewert*
$(X \in \mathbb{O}) \cdot (X = \bigcup X) \Rightarrow \delta(X) = \lambda_{\delta \restriction X}$	*Grenzwert*

Beweise:
Folgewert:

transfinite Rekursion + Teilrekursion (Realwerte, hyp-zählen) $\underline{(\delta(X') = \varphi_{\delta \restriction X'})} \cdot (X' = \mathsf{Def}\delta \restriction X')$

>Nachfolger(hyp) $\mathsf{Def}\delta \restriction X' \neq \bigcup \mathsf{Def}\delta \restriction X'$ *U, bedingt definiert* $\delta(X') = \sigma_{\delta \restriction X'}$ ■

Grenzwert:

transfinite Rekursion +Teilrekursion (Realwerte, hyp1) $\underline{(\delta(X) = \varphi_{\delta \restriction X})} \cdot (X = \mathsf{Def}\delta \restriction X)$ *>hyp2*

$\mathsf{Def}\delta \restriction X = \bigcup \mathsf{Def}\delta \restriction X$ *U bedingt definiert* $\delta(X) = \lambda_{\delta \restriction X}$ ■

9 Hierarchien

Nun wird Neumanns Hierarchie, die Mengen durch Potenzen der leeren Menge konstruiert, verallgemeinert mit einer **Potenzvariante**, bei der eine Tauschfunktion die leere Menge mit einer gewählten Startklasse vertauscht:

Definitionen:	
$\mathcal{S}_A := \{(x, y) \mid y = (x \cdot (x \neq A) \vee A \cdot (x = 0))\}$	*Tauschfunktion*
$\mathcal{P}_A X := \mathcal{S}_A[\mathcal{P}X]$	*Potenzvariante*

Theoreme:	
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow ((X \in \mathsf{I}) \cdot (X \neq A) \cdot (X \neq 0) \Rightarrow (\mathcal{S}_A(X) = X))$	*fix*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow (\mathcal{S}_A(0) = A) \cdot (\mathcal{S}_A(A) = 0)$	*vertauscht*
$A \notin \mathsf{I} \Rightarrow \mathcal{S}_A(0) \notin \mathsf{I}$	*Tauschlücke*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow (X \in \mathsf{I}) \cdot (Y \in \mathsf{I}) \Rightarrow ((\mathcal{S}_A(X) = Y) \Rightarrow (X = \mathcal{S}_A(Y)))$	*Rücktausch*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow (\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_A = \mathsf{Id})$	*selbstinvers*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow ((0 \in B) \cdot (A \notin B) \Rightarrow (\mathcal{S}_A[B] = \{A\} \cup B \setminus \{0\}))$	*Variante*
$A \in B \Rightarrow (0 \in B \Rightarrow (\mathcal{S}_A[B] = B))$	*Original*
$X \in \mathsf{I} \Rightarrow X \in \{A\} \cup B \setminus \{0\} = (X = A) \vee (X \in B) \cdot (X \neq 0)$	*Tauschfälle*

Beweise mit $\phi_X := X \cdot (X \neq A) \vee A \cdot (X = 0)$, *FÄLLE* $:= (X = A) \vee (X = 0) \vee (X \neq A) \cdot (X \neq 0)$:

(0) FÄLLE: $_B$ ■

(1) $\phi_A = 0$: ϕ_A *def* $A \cdot (A \neq A) \vee A \cdot (A = 0)$ *reflexiv-wahr, Tausch* $A \cdot \neg \mathsf{I} \vee 0 \cdot (A = 0)$ $_B$ 0 ■

(2) $\phi_0 = A$: ϕ_0 *def* $0 \cdot (0 \neq A) \vee A \cdot (0 = 0)$ *-reflexiv B* A ■

(3) $(X\neq A)\cdot(X\neq 0)\Rightarrow(\phi_X=X)$: ϕ_X $_{def}$ $X\cdot(X\neq A)\vee A\cdot(X=0)$ $_{hyp1\text{-}wahr,\ hyp2\text{-}falsch}$
$X\cdot\mathrm{I}\vee A\cdot 0$ $_B$ X ■

(4) $A\in\mathrm{I}\Rightarrow(X\in\mathrm{I}\Rightarrow X\in\mathrm{Def}S_A)$: $_{(1)(2)(3)disjunktiv\ >FÄLLE}$ $(\phi_X=0)\vee(\phi_X=A)\vee(\phi_X=X)$
$_{disjunktiv>elementar\ >hyp1\ >hyp2,\ B}$ $\phi_X\in\mathrm{I}$ $_{erfüllt\text{-}Graph2\ (hyp2)}$ $X\in\mathrm{Def}S_A$ ■

vertauscht:
$_{(4)\ (hyp,\ elementar)}$ $(A\in\mathrm{Def}S_A)\cdot(0\in\mathrm{Def}S_A)$ $_{Graph1}$ $(S_A(A)=\phi_A)\cdot(S_A(0)=\phi_0)$
$_{>(1)(2)\ (hyp)}$ $(S_A(0)=A)\cdot(S_A(A)=0)$ ■

fix:
$_{(4)\ (hyp\ 1\text{-}4)}$ $X\in\mathrm{Def}S_A$ $_{Graph1}$ $S_A(X)=\phi_X$ $_{(3)\ (hyp3+4)}$ $S_A(X)=X$ ■

Tauschlücke:
$_{indirekt}$: $S_A(0)\in\mathrm{I}$ $_{Argument}$ $0\in\mathrm{Def}S_A$ $_{Graph2\text{-}erfüllt}$ $\phi_0\in\mathrm{I}$ $_{(2)}$ $A\in\mathrm{I}$ $_{hyp\text{-}falsch}$ 0 ■

(5) $(A\in\mathrm{I})\cdot(X\in\mathrm{I})\Rightarrow(S_A(S_A(X))=X)$:
Fall 1 $S_A(S_A(0))=0$: $S_A(S_A(0))$ $_{vertauscht\ (hyp1)}$ $S_A(A)$ $_{vertauscht\ (hyp1)}$ 0;
Fall 2 $S_A(S_A(A))=A$: $S_A(S_A(A))$ $_{vertauscht\ (hyp1)}$ $S_A(0)$ $_{vertauscht\ (hyp1)}$ A;
Fall 3 $(X\neq A)\cdot(X\neq 0)\Rightarrow(S_A(S_A(X))=X)$: $S_A(S_A(X))=X$ $_{fix\ (hyp1+2)}$ $S_A(X)$
$_{fix\ (hyp1+2)}$ X; $_{disjunktiv:\ Fall\ 1\text{-}3>FÄLLE,\ B}$ $S_A(S_A(X))=X$ ■

Rücktausch:
$S_A(X)=Y$ $_{kongruent}$ $S_A(S_A(X))=S_A(Y)$ $_{(5)}$ $X=S_A(Y)$ ■

selbstinvers:
$S_A\circ S_A$ $_{def}$ $\{(x,y)|y=S_A(S_A(x))\}$ $_{(5)\ hyp}$ $\{(x,y)|y=x\}$ $_{def}$ Id ■

Tauschfälle:
$X\in\{A\}\cup B\setminus\{0\}$ $_{distributiv}$ $(X\in\{A\})\vee(X\in B\setminus\{0\})$ $_{Ausnahme}$
$(X\in\{A\})\vee(X\in B)\cdot(X\notin\{0\})$ $_{gleich\ (hyp)}$ $(X=A)\vee(X\in B)\cdot(X\neq 0)$ ■

(6) $(X\in\mathrm{I})\cdot(S_A(X)\in B)=X\in S_A[B]$:
$(X\in\mathrm{I})\cdot(S_A(X)\in B)$ $_{quantifizieren}$ $\exists x:((S_A(X)=x)\cdot(x\in B))$ $_{Rücktausch}$
$\exists x:((X=S_A(x))\cdot(x\in B))$ $_{def\ erfüllt\ (hyp1)}$ $X\in S_A[B]$; $_{umgekehrt:\ erfüllt}$
$(\underline{X\in\mathrm{I}})\cdot\exists x:((X=S_A(x))\cdot(x\in B))$ $_{Rücktausch}$ $\exists x:((S_A(X)=x)\cdot(x\in B))$ $_{Tausch}$
$\exists x:(S_A(X)\in B)$ $_{ungebunden\ +U}$ $(X\in\mathrm{I})\cdot(S_A(X)\in B)$ ■

Variante:
$\underline{S_A(X)\in B=(X=A)\vee(X\in B)\cdot(X\neq 0)}$ $_{für\ drei\ Fälle}$:
Fall 1 $X=A$: $S_A(A)\in B$ $_{vertauscht\ (hyp1)}$ $0\in B$ $_{hyp2\text{-}wahr}$ I $_B$ $\mathrm{I}\vee(A\in B)\cdot(A\neq 0)$ $_{reflexiv\text{-}wahr}$
$(A=A)\vee(A\in B)\cdot(A\neq 0)$;
Fall 2 $X=0$: $S_A(0)\in B$ $_{vertauscht\ (hyp1)\ +hyp3}$ $(A\in B)\cdot(A\notin B)$ $_B$ 0 $_B$ $0\cdot(0=A)$ $_{hyp2\text{-}falsch}$
$(0\notin B)\cdot(0=A)$ $_{Tausch}$$(A\notin B)\cdot(0=A)$ $_{-hyp3}$ $0=A$ $_B$ $(A=0)\vee\mathrm{I}\cdot 0$ $_{hyp2\text{-}wahr,\ reflexiv\text{-}falsch}$
$(0=A)\vee(0\in B)\cdot(0\neq 0)$;

Fall 3 $(X{\neq}A)\cdot(X{\neq}0)$: $S_A(X){\in}B$ $_{\textit{fix (Fall 3)}}$ $X{\in}B$ $_{\textit{+Fall 3/2}}$ $(X{\in}B)\cdot(X{\neq}0)$ $_{B}$
$0\vee(X{\in}B)\cdot(X{\neq}0)$ $_{\textit{Fall 3/1-falsch}}$ $(X{=}A)\vee(X{\in}B)\cdot(X{\neq}0)$;
$_{\textit{U (6) Tauschfälle}}$ $X{\in}S_A[B]{=}X{\in}\{A\}{\cup}B\backslash\{0\}$ $_{\textit{frei}}$ $S_A[B]{=}\{A\}{\cup}B\backslash\{0\}$ ■

Original:

$_{\textit{frei}}$: $X{\in}S_A[B]$ $_{(6)}$ $S_A(X){\in}B$ $_{\textit{disjunktiv: hyp1 hyp2 Tauschfälle>FÄLLE, B}}$ $X{\in}B$;
$_{\textit{umgekehrt}}$: $\underline{X{\in}B}$ $_{\textit{disjunktiv: vertauscht/fix>FÄLLE}}$ $(X{=}S_A(0))\vee(X{=}S_A(A))\vee(X{=}S_A(X))$
$_{\textit{quantifizieren (elementar, hyp1, U) disjunktiv B}}$ $\exists x{:}((X{=}S_A(x))\cdot(X{\in}B))$ $_{\textit{erfüllt (hyp1-real hyp2, U)}}$
$X{\in}S_A[B]$ ■

Wird die Tauschfunktion auf eine Potenz angewandt, entsteht eine Potenzvariante mit ähnlichen Eigenschaften; in Sonderfällen ist es auch die übliche Potenz:

Theoreme:	
$\mathcal{P}_0X{=}\mathcal{P}X$	*übliche Potenz*
$X{\subseteq}Y{\Rightarrow}\mathcal{P}_AX{\subseteq}\mathcal{P}_AY$	*monoton*
$A{\in}\mathsf{I}{\Rightarrow}(X{\in}\mathbb{B}{\Rightarrow}(\mathcal{P}_AX{\neq}F[X])\cdot(\mathcal{P}_AX{\neq}X))$	*kein Bild*
$X{\in}\mathbb{B}{\Rightarrow}\mathcal{P}_AX{\in}\mathbb{B}$	*Bildpotenz*
$(A{\in}\mathsf{I})\cdot(A{\notin}\mathcal{P}X)\Rightarrow\mathcal{P}_AX{=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}X\backslash\{0\}$	*Potenzvariante*
$A{\in}\mathcal{P}X\Rightarrow\mathcal{P}_AX{=}\mathcal{P}X$	*Normalpotenz*
$(A{\in}\mathsf{I})\cdot\forall y{\in}X{:}(y{\subseteq}\mathcal{P}_Ay){\Rightarrow}\bigcup X{\subseteq}\mathcal{P}_A\bigcup X$	*akkumulieren*

Beweise:

übliche Potenz:

$\underline{S_0{=}\mathsf{Id}}$: S_0 $_{\textit{def}}$ $\{(x,y)|y{=}(x\cdot\neg(x{=}0)\vee0\cdot(x{=}0))\}$ $_{\textit{Tausch}}$
$\{(x,y)|y{=}(x\cdot\neg(x{=}0)\vee x\cdot(x{=}0))\}$ $_{B}$ $\{(x,y)|y{=}x\}$ $_{\textit{def}}$ Id;
$\mathcal{P}_0X$ $_{\textit{def}}$ $S_0[\mathcal{P}X]$ $_{U}$ $\mathsf{Id}[\mathcal{P}X]$ $_{\textit{identisches Bild}}$ $\mathcal{P}X$ ■

monoton:

$X{\subseteq}Y$ $_{\textit{monoton für }\mathcal{P}}$ $\mathcal{P}X{\subseteq}\mathcal{P}Y$ $_{\textit{monoton (für Bild)}}$ $S_A[\mathcal{P}X]{\subseteq}S_A[\mathcal{P}Y]$ $_{\textit{def}}$ $\mathcal{P}_AX{\subseteq}\mathcal{P}_AY$ ■

Potenzvariante:

$_{\textit{extrem}}$ $0{\subseteq}X$ $_{\textit{erfüllt (elementar)}}$ $0{\in}\mathcal{P}X$ $_{\textit{Variante (hyp)}}$ $S_A[\mathcal{P}X]{=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}X\backslash\{0\}$
$_{\textit{def}}$ $\mathcal{P}_AX{=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}X\backslash\{0\}$ ■

Normalpotenz:

$_{\textit{extrem, erfüllt (elementar)}}$ $0{\in}\mathcal{P}X$ $_{\textit{Original (hyp)}}$ $S_A[\mathcal{P}X]{=}\mathcal{P}X$ $_{\textit{def}}$ $\mathcal{P}_AX{=}\mathcal{P}X$ ■

kein Bild:

$_{\textit{indirekt}}$: $\mathcal{P}_AX{=}F[X]$ $_{\textit{kongruent, def}}$ $S_A[S_A[\mathcal{P}X]]{=}S_A[F[X]]$ $_{\textit{Bild vom Bild}}$
$S_A{\circ}S_A[\mathcal{P}X]{=}S_A{\circ}F[X]$ $_{\textit{selbstinvers}}$ $\mathsf{Id}[\mathcal{P}X]{=}S_A{\circ}F[X]$ $_{\textit{identisches Bild}}$ $\mathcal{P}X{=}S_A{\circ}F[X]$
$_{\textit{kein Bild (für }\mathcal{P}\textit{)-falsch (hyp1+2)}}$ 0; $_{\textit{speziell Fall}}$ $\mathcal{P}_AX{\neq}\mathsf{Id}[X]$ $_{\textit{identisches Bild}}$ $\mathcal{P}_AX{\neq}X$ ■

Bildpotenz: $X{\in}\mathbb{B}$ $_{\textit{Bildpotenz für }\mathcal{P}}$ $\mathcal{P}X{\in}\mathbb{B}$ $_{\textit{Bildbelegung}}$ $S_A[\mathcal{P}X]{\in}\mathbb{B}$ $_{\textit{def}}$ $\mathcal{P}_AX{\in}\mathbb{B}$ ■

akkumulieren

frei: $\underline{Z\in\bigcup X}$ *erfüllt* $\exists y{:}((Z\in y)\cdot(\underline{y\in X}))$ *hyp-speziell* $\exists y{:}((Z\in y)\cdot(y\subseteq\mathcal{P}_A y))$ *Syllogismus*
$\underline{\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}_A y);}$
Fall 1 $Z=A$: *Fall 2* $A\in\mathcal{P}\bigcup X$: *Fall 1* $Z\in\mathcal{P}\bigcup X$ *Normalpotenz (Fall 2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;
Fall $\neg 2$ $A\notin\mathcal{P}\bigcup X$: *Fall 1>hyp-existent* $Z\in\{A\}$ *extensiv* $Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}\bigcup X\setminus\{0\}$
Potenzvariante (hyp1, Fall ¬2) $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;
Fall 1-falsch $(Z=A)=0$ mit *Fall 2*: *Fall 3* $A\in\mathcal{P}y$: *Normalpotenz* $\mathcal{P}_A y=\mathcal{P}y$ *>U3*
$\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}y)$ *Potenzschranke(U2)* $\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}\bigcup X)$ *ungebunden, Normalpotenz (Fall 2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;
Fall $\neg 3$ $A\notin\mathcal{P}y$: *Potenzvariante (hyp1) >U3* $\exists y{:}(Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}y\setminus\{0\})$ *distributiv, Ausnahme*
$\exists y{:}((Z\in\{A\})\vee(Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\notin\{0\}))$ *gleich (U1-real, elementar)*
$\exists y{:}((Z=A)\vee(Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\neq 0))$ *Fall 1-falsch, B* $\exists y{:}((Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\neq 0))$ *Potenzschranke (U2)*
$\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}\bigcup X)$ *ungebunden* $Z\in\mathcal{P}\bigcup X$ *Normalpotenz (Fall 2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;
Fall $\neg 2$: *Potenzschranke (Kontraposition)>U2* $A\notin\mathcal{P}y$ *Potenzvariante (hyp1) >U3* $\exists y{:}(Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}y\setminus\{0\})$
distributiv, gleich (U1-real) $\exists y{:}((Z=A)\vee(Z\in\mathcal{P}y\setminus\{0\}))$ *Fall 1-falsch, B, Ausnahme*
$\exists y{:}((Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\notin\{0\}))$ *Potenzschranke (U2)* $\exists y{:}((Z\in\mathcal{P}\bigcup X)\cdot(Z\notin\{0\}))$ *ungebunden, Ausnahme*
$Z\in\mathcal{P}\bigcup X\setminus\{0\}$ *extensiv* $Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}\bigcup X\setminus\{0\}$ *Potenzvariante (hyp1,Fall ¬2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$ ■

Neumann dehnte die Potenzen der leeren Menge ins Transfinite aus durch implizit rekursiv definierte Ränge, die bei Grenzzahlen vorige Ränge vereinigen. Dasselbe erreichen **explizit definierte Klassenränge** mit der Potenzvariante:

Definition:
$V_A := \bigcup\{f\in\mathsf{FOLGE}\,|\,\forall z\in\mathsf{Def}f{:}(f(z)=\mathcal{P}_A f(\bigcup z)\ \mathsf{FALLS}\ z\neq\bigcup z\ \mathsf{SONST}\ \bigcup f[z])\}$

Theoreme:

$V_A(0)=0$	*Startrang*
$X\in\mathbb{O} \Rightarrow V_A(X')=\mathcal{P}_A V_A(X)$	*Folgerang*
$(X\in\mathbb{O})\cdot(X=\bigcup X) \Rightarrow V_A(X)=\bigcup V_A[X]$	*Grenzrang*
$A\in\mathsf{I} \Rightarrow V_A(1)=\{A\}$	*Rang 1*
$X\in\mathbb{O} \Rightarrow V_A(X)\in\mathbb{B}$	*Realrang*
$(A\in\mathsf{I})\cdot(A\notin V_A(X))\cdot(Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)) \Rightarrow$ $(Y=A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(X\neq 0)$	*Teilrangvariante*
$(A\in V_A(X))\cdot(Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)) \Rightarrow Y\subseteq V_A(X)$	*Teilrang*
$X\in\mathbb{O} \Rightarrow Y\in\bigcup V_A[X]=\exists z\in X{:}(Y\in V_A(z))$	*Vorrang*

Beweise mit $\sigma_F:=\mathcal{P}_A F(\bigcup\mathsf{Def}F)$, $\lambda_F:=\bigcup\mathsf{Im}F$, $p_F := \mathsf{Def}F\neq\bigcup\mathsf{Def}F$:

(λ) $\lambda_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z]$, $\neg p_{F\restriction Z}\Rightarrow(\varphi_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z])$:
def $\lambda_{F\restriction Z}=\bigcup\mathsf{Im}(F\restriction Z)$ *>Einschränkung* $\lambda_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z]$ *bedingt definiert (hyp)* $\varphi_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z]$ ■

(σ) $(Z{\in}\mathbb{O})\cdot(Z{=}\mathrm{Def}F{\restriction}_Z)\cdot p_{F\restriction_Z}\Rightarrow(\sigma_{F\restriction_Z}{=}\mathcal{P}_AF(\bigcup Z))\cdot(\varphi_{F\restriction_Z}{=}\mathcal{P}_AF(\bigcup Z))$:

Vorgänger (hyp1, hyp3/2) $\underline{\bigcup Z{\in}Z}$; $\varphi_{F\restriction_Z}$ *bedingt definiert (hyp3)* $\sigma_{F\restriction_Z}$ *def* $\mathcal{P}_AF{\restriction}_Z(\bigcup\mathrm{Def}(F{\restriction}_Z))$ *hyp2* $\mathcal{P}_AF{\restriction}_Z(\bigcup Z)$ *wertgleich (hyp1, U)* $\mathcal{P}_AF(\bigcup Z)$ ■

(1) $(F{\in}\mathsf{FOLGE})\cdot(Z{\in}\mathrm{Def}F)\Rightarrow(\varphi_{F\restriction_Z}{=}\mathcal{P}_AF(\bigcup Z)\ \mathsf{FALLS}\ Z{\neq}\bigcup Z\ \mathsf{SONST}\ \bigcup F[Z])$:

Zahlargumente (hyp1) $\mathrm{Def}F{\in}\mathbb{O}$ *Subzahl-Teilfunktion (hyp2)* $\underline{(Z{\in}\mathbb{O})\cdot(Z{=}\mathrm{Def}(F{\restriction}_Z))}$;
$\varphi_{F\restriction_Z}$ *def* $\sigma_{F\restriction_Z}\cdot p_{F_Z}\vee\lambda_{F\restriction_Z}\cdot\neg p_{F_Z}$ *(λ)(σ) disjunktiv (U)* $\overline{\mathcal{P}_AF(\bigcup Z)\cdot p_{F_Z}\vee\bigcup F[Z]\cdot\neg p_{F_Z}}$ *def, hyp2* $\mathcal{P}_AF(\bigcup Z)\ \mathsf{FALLS}\ Z{\neq}\bigcup Z\ \mathsf{SONST}\ \bigcup F[Z]$ ■

(δ) $\delta{=}V_A$: δ *def* $\bigcup\{f{\in}\mathsf{FOLGE}|\forall z{\in}\mathrm{Def}f{:}(f(z){=}\varphi_{f\restriction_z})\}$ *(1)* V_A ■

(φ) $X{\in}\mathbb{O}\Rightarrow f_X$ mit $f_X{:=}(X{\subseteq}\mathrm{Def}\delta\Rightarrow\varphi_{\delta\restriction_X}{\in}\mathbb{B})$ *transfinite Induktion*:

Startfall f_0: *Teilfunktion (f_0-hyp)* $0{=}\mathrm{Def}\delta{\restriction}_0$ *>⋃leer, def of p* $\neg p_{\delta_0}$ *(λ)* $\varphi_{\delta\restriction_0}{=}\bigcup\delta[0]$
Leerfunktion $\varphi_{\delta\restriction_0}{=}\bigcup 0$ *⋃leer* $\varphi_{\delta\restriction_0}{=}0$ *>elementar* $\varphi_{\delta\restriction_0}{\in}\mathbb{B}$ ■

Zählfall $X{\in}\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$:
$f_{X'}$*-hyp* $\underline{X'{\subseteq}\mathrm{Def}\delta}$ *Teilfunktion* $\underline{X'{=}\mathrm{Def}\delta{\restriction}_{X'}}$ *>Nachfolger (hyp)* p_{δ_X} *(σ) (hyp-zählen, U2)*
$\varphi_{\delta\restriction_{X'}}{=}\mathcal{P}_A\delta(\bigcup(X'))$ *rückwärts (hyp)* $\underline{\varphi_{\delta\restriction_{X'}}{=}\mathcal{P}_A\delta(X)}$; *mitgezählt (hyp) +Subzahl (hyp-zählen)*
$(X{\in}X')\cdot(X{\subseteq}X')$ *Syllogismus (U1), transitiv (U1)* $(X{\in}\mathrm{Def}\delta)\cdot(X{\subseteq}\mathrm{Def}\delta)$ *Rekursion, hyp2(f_X)*
$(\delta(X){=}\delta{\restriction}_X)\cdot(\delta{\restriction}_X{\in}\mathbb{B})$ *Tausch* $\delta(X){\in}\mathbb{B}$ *Bildpotenz für $\mathcal{P}_A$* $\mathcal{P}_A\delta(X){\in}\mathbb{B}$ *U3* $\varphi_{\delta\restriction_{X'}}{\in}\mathbb{B}$ ■

Grenzfall $X{\in}\mathbb{O}\Rightarrow((X{=}\bigcup X)\cdot\forall z{\in}X{:}f_z\Rightarrow f_X)$:
f-hyp2 $\underline{X{\subseteq}\mathrm{Def}\delta}$ *def Teilfunktion* $X{=}\mathrm{Def}\delta{\restriction}_X$ *hyp2* $\neg p_{\delta_X}$ *(λ)* $\underline{\varphi_{\delta\restriction_X}{=}\bigcup\delta[X]}$;
hyp1 erfüllt $X{\in}\mathbb{M}$ *Bildart* $X{\in}\mathbb{B}$ *Bildbelegung* $\underline{\delta[X]{\in}\mathbb{B}}$;
$\underline{\delta[X]{\subseteq}\mathbb{B}}$ *frei*: $Y{\in}\delta[X]$ *def erfüllt* $\exists z{:}(\underline{(Y{=}\delta(z))}\cdot\underline{(z{\in}X)})$ *Syllogismus (U4), Subzahl(hyp1)*
$\exists z{:}((z{\in}\mathrm{Def}\delta)\cdot(z{\subseteq}X))$ *Rekursion transitiv (U4)* $\exists z{:}((\delta(z){=}\varphi_{\delta\restriction_z})\cdot(z{\subseteq}\mathrm{Def}\delta))$
(hyp3-speziell (U9) $\exists z{:}(\varphi_{\delta\restriction_z}{\in}\mathbb{B})$ *U10, U8, ungebunden* $Y{\in}\mathbb{B}$;
Bildvereinigung (U6+7) $\bigcup\delta[X]{\in}\mathbb{B}$ *U5* $\varphi_{\delta\restriction_X}{\in}\mathbb{B}$ ■

Realrang und *Realwerte*:

$X{\in}\mathbb{O}$ *(φ)* $X{\subseteq}\mathrm{Def}\delta\Rightarrow\varphi_{\delta\restriction_X}{\in}\mathbb{B}$ *>hyp2* $\underline{\varphi_{\delta\restriction_X}{\in}\mathbb{B}}$ *real* $\varphi_{\delta\restriction_X}{\in}\mathsf{I}$ ■
U transfinite Rekursion $\delta(X){\in}\mathbb{B}$ *(δ)* $V_A(X){\in}\mathbb{B}$ ■

Startrang:

Zahl $0{\in}\mathbb{O}$ *Transfinität (Realwerte)* $0{\in}\mathrm{Def}\delta$ *Grenzwert (⋃leer)* $\delta(0){=}\lambda_{\delta\restriction_0}$ *(δ)(λ)*
$V_A(0){=}\bigcup\delta[0]$ *Leerfunktion* $V_A(0){=}0$ ■

Folgerang:

hyp-zählen, Teilrekursion $\underline{X'{=}\mathrm{Def}(\delta{\restriction}_{X'})}$ *>Nachfolger (hyp)* $\underline{p_\delta}$;
$V_A(X')$ *(δ)* $\delta(X')$ *Folgewert (Realwerte, hyp)* $\sigma_{\delta\restriction_{X'}}$ *(σ) (hyp-zählen, U1, U2)*
$\mathcal{P}_A\delta(\bigcup(X'))$ *rückwärts (hyp), (δ)* $\mathcal{P}_AV_A(X)$ ■

Grenzrang:

$V_A(X)\ _{(\delta)}\ \delta(X)\ _{\textit{Grenzwert (Realwerte, hyp)}}\ \lambda_{\delta\restriction X}\ _{(\lambda)}\ \bigcup\delta[X]\ _{(\delta)}\ \bigcup V_A[X]$ ■

Rang 1:

$V_A(1)\ _{\textit{def}}\ V_A(0')\ _{\textit{Folgerang}}\ \mathcal{P}_A V_A(0)\ _{\textit{Startrang}}\ \mathcal{P}_A 0\ _{\textit{def}}\ S_A[\mathcal{P}0]\ _{\textit{Nullpotenz}}\ S_A[\{0\}]$ $_{\textit{Einzelbild}}\ \{S_A(0)\}\ _{\textit{vertauscht (hyp)}}\ \{A\}$ ■

Teilrangvariante:

$Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)\ _{\textit{Variante (hyp1)}}\ Y\in\{A\}\vee\mathcal{P}V_A(X)\setminus\{0\}\ _{\textit{Tauschfälle}}$
$(Y{=}A)\vee(Y\in\mathcal{P}V_A(X))\cdot(Y\neq 0)\ _{\textit{erfüllt}}\ (Y{=}A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(Y\neq 0)$ ■

Teilrang:

$Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)\ _{\textit{Original}}\ Y\in\mathcal{P}V_A(X)\ _{\textit{erfüllt}}\ Y\subseteq V_A(X)$ ■

Vorrang:

$Y\in\bigcup V_A[X]\ _{\textit{Wertelement}}\ \exists\underline{z\in X}:((Y\in V_A(z))\cdot(V_A(z)\in\mathbb{I}))\ _{\textit{-real rank (hyp U Subzahl)}}$
$\exists z\in X:(Y\in V_A(z))$ ■

Bei inexistenten Startklassen wie der Russell-Klasse, der Klasse aller Ordinalzahlen oder der Klasse aller Mengen ergeben sich leere Ränge und leere Hierarchien. Nur bei einer existenten Startklasse entstehen durch Vereinigung aller Ränge effektive **kumulative Hierarchien**, deren Ränge eine aufsteigende Inklusionskette abbildbarer Klassen bilden:

Definition:

DIE HIERARCHIE ÜBER $A := \mathbb{V}_A := \bigcup V_A[\mathbb{O}]$

Theoreme:

$A\notin\mathbb{I}\Rightarrow\mathbb{V}_A{=}0,\ \mathbb{V}_{\dagger}{=}0,\ \mathbb{V}_{\mathbb{M}}{=}0,\ \mathbb{V}_{\mathbb{O}}{=}0$	*leere Hierarchie*
$\mathbb{V}_A\subseteq\mathbb{B}\cup\{A\},\quad A\in\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{V}_A\subseteq\mathbb{B}$	*abbildbar*
$A\in\mathbb{I}\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{O}:\forall z\in x:(V_A(z)\subset V_A(x))$	*kumulative Hierarchie*

Beweise:

(0): $A\notin\mathbb{I}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{O}:(V_A(x){=}0)$ mit $f_X:=(V_A(X){=}0)\ _{\textit{transfinite Induktion}}$:

Startfall f_0: $_{\textit{Startrang}}\ V_A(0){=}0$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $V_A(X')\ _{\textit{Folgerang}}\ \mathcal{P}_A V_A(X)\ _{\textit{hyp2-def}}\ \mathcal{P}_A 0\ _{\textit{def}}$ $S_A[\mathcal{P}0]\ _{\textit{Nullpotenz}}\ S_A[\{0\}]\ _{\textit{Einzelbild}}\ \{S_A(0)\}\ _{\textit{Tauschlücke, nicht existent}}\ 0$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X{=}\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$:

Fall $X{=}0$: $_{\textit{Startfall}}\ f_0$; *Fall* $\underline{X\neq 0}$: $V_A(X)\ _{\textit{Grenzrang (hyp1+2)}}\ \bigcup V_A[X]$ $_{\textit{Leerfunktion (hyp3, Fall)}}\ \bigcup\{0\}\ _{\bigcup\textit{Einheit (elementar)}}\ 0$ ■

leere Hierarchie:

$\mathbb{V}_A\ _{\textit{def}}\ \bigcup\{y\,|\,\exists x:((y{=}V_A(x))\cdot(x\in\mathbb{O}))\}\ _{\textit{(0)(hyp)}}\ \bigcup\{y\,|\,\exists x:((y{=}0)\cdot(x\in\mathbb{O}))\}$

$_{\textit{ungebunden}} \bigcup\{y|(y=0)\cdot\exists x:(x\in\mathbb{O})\}$ $_{\textit{nichtleer}}$ $\bigcup\{y|(y=0)\cdot(\mathbb{O}\neq 0)\}$ $_{\textit{-Zahl nichtleer}}$
$\bigcup\{y|y=0\}$ $_{\textit{def}}$ $\bigcup\{0\}$ $_{\bigcup\textit{Einheit (elementar)}}$ 0 ■

(1) $X\in\mathbb{O} \Rightarrow (Y\in V_A(X))\cdot(Y\neq A)\Rightarrow Y\in\mathbb{B}$: $_{\textit{transfinite Induktion}}$ mit
$f_X:=(Y\in V_A(X))\cdot(Y\neq A)\Rightarrow Y\in\mathbb{B}$:

Startfall f_0: $_{f_0\textit{-hyp1}}$ $Y\in V_A(0)$ $_{\textit{Startrang}}$ $Y\in 0$ $_{\textit{leer-falsch}}$ 0 $_{\textit{B(ex falso quodlibet)}}$ $Y\in\mathbb{B}$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $_{f_{X'}\textit{-hyp}}$ $Y\in V_A(X')$ $_{\textit{Folgerang}}$ $\underline{Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)}$ $_{\textit{Fall } A\in V_A(X)}$
$_{\textit{Teilrang}}$ $Y\subseteq V_A(X)$, $_{\textit{U1 Fall } A\notin V_A(X) \textit{ Teilrangvariante}}$ $(Y=A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(X\neq 0)$
$_{f_X\textit{-hyp2-falsch B}}$ $Y\subseteq V_A(X)$; $_{\textit{beide Fälle +Realrang, Teilbild}}$ $Y\in\mathbb{B}$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$: $_{\textit{f-hyp1}}$ $Y\in V_A(X)$ $_{\textit{Grenzrang}}$
$Y\in\bigcup V_A[X]$ $_{\textit{Vorrang}}$ $\exists z:((\underline{Y\in V_A(z)})\cdot(z\in X))$ $_{\textit{hyp3-speziell } f_z \textit{ >f-hyp2+U2}}$ $Y\in\mathbb{B}$ ■

abbildbar:

$_{\textit{frei}}$: *Fall 1* $X=A$: $X\in\mathbb{V}_A$ $_{\textit{real-existent}}$ $X\in\{X\}$ $_{\textit{Fall 1}}$ $X\in\{A\}$ $_{\textit{extensiv}}$ $X\in X\in\mathbb{B}\cup\{A\}$;
Fall 2 $X\neq A$: $X\in\mathbb{V}_A$ $_{\textit{def, Vorrang}}$ $\exists z:((\underline{X\in V_A(z)})\cdot(z\in\mathbb{O}))$ $_{\textit{(1) >U1, Fall 2}}$ $\exists z:(X\in\mathbb{B})$
$_{\textit{ungebunden}}X\in\mathbb{B}$ $_{\textit{extensiv}}$ $X\in\mathbb{B}\cup\{A\}$ ■
$A\in\mathbb{B}$ $_{\textit{individuell def}}$ $\{A\}=\{A\}\cdot\mathbb{B}$ $_{\textit{kongruent}}$ $\mathbb{B}\cup\{A\}=\mathbb{B}\cup\{A\}\cdot\mathbb{B}$ $_{B}$ $\mathbb{B}\cup\{A\}=\mathbb{B}$
$_{\textit{>abbildbar1}}$ $\mathbb{V}_A\subseteq\mathbb{B}$ ■

(2) $(A\in\mathrm{I})\cdot(X\in\mathbb{O})\Rightarrow V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ mit $f_X:=V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ $_{\textit{transfinite Induktion}}$:

Startfall f_0: $_{\textit{extrem}}$ $0\subseteq\mathcal{P}_A V_A(0)$ $_{\textit{Startrang}}$ $V_A(0)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(0)$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ $_{\textit{monoton}}$
$\mathcal{P}_A V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A\mathcal{P}_A V_A(X)$ $_{\textit{Folgerang}}$ $V_A(X')\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X')$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$: $_{\textit{hyp3}}$ $\forall z\in X:V_A(z)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(z)$
$_{\textit{akkumulieren (hyp)}}$ $\bigcup V_A[X]\subseteq\mathcal{P}_A\bigcup V_A[X]$ $_{\textit{Grenzrang}}$ $V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ ■

(3) $(Z\in X)\cdot(X\in\mathbb{O})\Rightarrow V_A(Z)\subseteq\bigcup V_A[X]$:
$_{\textit{frei}}$: $Y\in V_A(Z)$ $_{\textit{quantifizieren (hyp1)}}$ $\exists z\in X:(Y\in V_A(z))$ $_{\textit{Vorrang (hyp2)}}$ $Y\in\bigcup V_A[X]$ ■

kumulative Hierarchie: mit $f_X:=\forall z\in X:(V_A(z)\subset V_A(X))$ $_{\textit{transfinite Induktion}}$:

Startfall f_0 $_{\textit{frei}}$: $Z\in 0$ $_{\textit{+nichtleer}}$ $(Z\in 0)\cdot(Z\notin 0)$ $_{\textit{B(ex falso quodlibet)}}$ $V_A(Z)\subset V_A(0)$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $_{\textit{(2) (hyp) +kein Bild (Realrang)}}$
$(V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X))\cdot(V_A(X)\neq\mathcal{P}_A V_A(X))$ $_{\textit{def, Folgerang (hyp1)}}$ $\underline{V_A(X)\subset V_A(X')}$;
$f_{X'}$ $_{\textit{generell}}$: $Z\in X'$ $_{\textit{vorher (hyp1)}}$ $(Z\in X)\vee(Z=X)$ $_{f_X\textit{-speziell (=hyp2) disjunktiv}}$
$(V_A(Z)\subset V_A(X))\vee(Z=X)$ $_{\textit{disjunktive: U-transitiv, >U, B}}$ $V_A(Z)\subset V_A(X')$ ■

Grenzfall detailliert $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall y\in X:\forall z\in y:(V_A(z)\subset V_A(y))\Rightarrow f_X)$:
f_X $_{\textit{generell}}$: $Z\in X$ $_{\textit{mitgezählt (Subzahl), Zählgrenze (hyp1+2)}}$ $(Z\in Z')\cdot(Z'\in X)$ $_{\textit{hyp3-speziell(hyp2) +(3)}}$
$(V_A(Z)\subset V_A(Z'))\cdot(V_A(Z')\subseteq\bigcup V_A[X])$ $_{\textit{transitiv}}$ $V_A(Z)\subset\bigcup V_A[X]$ $_{\textit{Grenzrang (hyp1+2)}}$
$V_A(Z)\subset V_A(X)$ ■

Neumanns Mengenhierarchie ist der Fall V_0 mit der *üblichen Potenz* $\mathcal{P}_0 X{=}\mathcal{P}X$. Das hält ein Korollar in vereinfachter Schreibweise fest:

Definitionen:	
V := V_0	
NEUMANNS HIERARCHIE := $\mathbb{V}_0$	

Theoreme:	
$V(0){=}0$	*Startrang*
$X{\in}\mathbb{O} \Rightarrow V(X'){=}\mathcal{P}V(X)$	*Folgerang*
$(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(X{=}\bigcup X) \Rightarrow V(X){=}\bigcup V[X]$	*Grenzrang*
$V(1){=}\{0\}$	*Mengenrang 1*
$V(2){=}\{0, \{0\}\}$	*Mengenrang 2*
$V(3){=}\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0,\{0\}\}\}$	*Mengenrang 3*
$\mathbb{V}_0{\subseteq}\mathbb{M}$	*Mengenhierarchie*

Das Hierarchieschema gilt natürlich auch für Urelemente. Für sie ergibt sich über eine einfache transfinite Induktion die übliche Potenz und eine größere Hierarchie, die $\mathbb{V}_0$ als echten Teil umfasst:

Theoreme:	
$(A{=}\{A\}){\cdot}(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(1{\in}X) \Rightarrow V_A(X'){=}\mathcal{P}V_A(X)$	*Potenzränge*
$(A{=}\{A\}) \Rightarrow V_A(1){=}\{A\}$	*Urelementrang 1*
$(A{=}\{A\}) \Rightarrow V_A(2){=}\{0, A\}$	*Urelementrang 2*
$(A{=}\{A\}) \Rightarrow V_A(3){=}\{0, A, \{0\}, \{0, A\}\}$	*Urelementrang 3*

Hier interessieren jedoch **reguläre Hierarchien**, bei denen in jedem Rang die leere Menge vertauscht wird. Beispiele sind $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$. Sie entstehen, wenn die Startklasse keine Teilklasse eines Rangs ist:

Theorem:	
$(A{\in}\mathrm{I}){\cdot}\forall x{\in}\mathbb{O}{:}(A{\not\subseteq}V_A(x)) \Rightarrow$	
$X{\in}\mathbb{O} \Rightarrow V_A(X'){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X){\setminus}\{0\}$	*regulärer Rang*
$V_A(1){=}\{A\}$	*Rang 1*
$V_A(2){=}\{A,\{A\}\}$	*Rang 2*
$V_A(3){=}\{A,\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}$	*Rang 3*

Beweise:

regulärer Rang:

$_{\textit{hyp2-speziell (hyp3) def}}\ \neg(A{\subseteq}V_A(X))\ _{\textit{erfüllt (hyp1), def}}\ A{\notin}\mathcal{P}V_A(X)\ _{\textit{Potenzvariante (hyp1)}}$
$\mathcal{P}_A V_A(X){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X){\setminus}\{0\}\ _{\textit{Folgerang (hyp3)}}\ V_A(X'){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X){\setminus}\{0\}$ ∎

(1) $0 \notin X \Rightarrow X = X \setminus \{0\}$:

$0 \notin X \;_{\mathit{def}}\; \{0\} \cdot X = 0 \;_{\mathit{kongruent}}\; X \setminus \{0\} \cup \{0\} \cdot X = X \setminus \{0\} \cup 0 \;_{B}\; X = X \setminus \{0\}$ ■

(2) $A \in \mathsf{I} \Rightarrow 0 \notin \{\{A\}\}$: $_{\mathit{indirekt}}\; 0 \in \{\{A\}\} \;_{\mathit{gleich}}\; 0 = \{A\} \;_{\mathit{hyp\text{-}existent\text{-}falsch}}\; 0$ ■

(3) $A \in \mathsf{I} \Rightarrow 0 \notin \{\{A\}, \{\{A\}\}, \{A, \{A\}\}\}$: $_{\mathit{indirekt}}\; 0 \in \{\{A\}, \{\{A\}\}, \{A, \{A\}\}\} \;_{\mathit{mehrdeutig}}$
$(0 = \{A\}) \vee (0 = \{\{A\}\}) \vee (0 = \{A, \{A\}\}) \;_{\text{distributiv: hyp-existent-falsch, elementar-falsch,}}$
$_{\text{>aufgezählt(hyp), } B}\; A \in 0 \;_{\text{leer-falsch, } B}\; 0$ ■

Rang 2:

$V_A(2) \;_{\mathit{def}}\; V_A(1') \;_{\text{regulärer Rang (hyp1 hyp2-speziell(Zahl))}}\; \{A\} \cup \mathcal{P} V_A(1) \setminus \{0\} \;_{\text{Rang 1}}$
$\{A\} \cup \mathcal{P}\{A\} \setminus \{0\} \;_{\mathit{Einheitspotenz}}\; \{A\} \cup \{0, \{A\}\} \setminus \{0\} \;_{\mathit{def}\,B}\; \{A\} \cup \{\{A\}\} \setminus \{0\}$
$_{(2)(1)}\; \{A\} \cup \{\{A\}\} \;_{\mathit{def}}\; \{A, \{A\}\}$ ■

Rang 3:

$V_A(3) \;_{\mathit{def}}\; V_A(2') \;_{\text{regulärer Rang (hyp1 hyp2-speziell(Zahl)}}\; \{A\} \cup \mathcal{P} V_A(2) \setminus \{0\} \;_{\text{Rang 2}}$
$\{A\} \cup \mathcal{P}\{A, \{A\}\} \setminus \{0\} \;_{\mathit{Paarpotenz}}\; \{A\} \cup \{0, \{A\}, \{\{A\}\}, \{A, \{A\}\}\} \setminus \{0\} \;_{B\,\mathit{def}}$
$\{A\} \cup \{\{A\}, \{\{A\}\}, \{A, \{A\}\}\} \setminus \{0\} \;_{(3)(1)\,\mathit{def}}\; \{A, \{A\}, \{\{A\}\}, \{A, \{A\}\}\}$ ■

Das Hierarchieschema funktioniert auch beim Überschreiten der Mengenlehre. In der binären Logik von Leibniz existiert nicht nur die leere Menge 0, sondern auch ihr Komplement I, was in der üblichen Mengenlehre mit einem Mengenuniversum Cantors Antinomie erzeugt [97]: Sie entsteht allein durch die Annahme $\mathbb{M} = \mathsf{I}$. Da alle wichtigen Resultate der Mengenlehre im extensionalen Universum auch ohne diese Annahme beweisbar sind, lässt sie sich als unnötig mit Ockhams Rasiermesser beseitigen. Dann kann man das Universum ohne Risiko als existent betrachten und erhält die binäre Logik von Leibniz, für die es einige äquivalente Axiome gibt:

Definitionen:

IMMANENT := BILD
$\mathbb{T}$:= TRANSZENDENT := NICHT-BILD

Theoreme in $\mathbb{E}$:

Cantor- oder ZF-Mengenlehre $\vdash \mathbb{M} = \mathsf{I} \vdash \mathsf{I} \notin \mathsf{I}$	*Mengenuniversum*	[96f]
$\mathbb{L} \dashv\vdash \mathsf{I}$ IST WAHR $\dashv\vdash \mathsf{I}$ IST EXISTENT	*die Wahrheit existiert*	
$\mathbb{L} \dashv\vdash \mathsf{I}$ IST WAHR uND 0 IST FALSCH	*binäre Logik*	
$\mathbb{L} \dashv\vdash \mathbb{L} = \mathsf{I} \quad \dashv\vdash \mathbb{L} = \mathbb{E}$	*Leibniz-Universum*	
$\mathbb{L} \dashv\vdash \mathsf{I} \in \mathbb{L} \quad \dashv\vdash \mathsf{I}$ IST TRANSZENDENT	*Transzendenz*	

Beweise:

die Wahrheit existiert:

$\mathbb{L} \;_{\text{def Binärsynonym } B}\; (\mathsf{I} \in \{\mathsf{I}\}) \cdot \mathbb{E} \;_{\text{-Prämisse } \mathbb{E}\text{, def}}\; \mathsf{I}$ IST WAHR ■

binäre Logik:

$\mathbb{L}$ $_{\textit{def Binärsynonym, Falsifizierbarkeit B}}$ $(\mathsf{I}{\in}\{\mathsf{I}\})\cdot(0{\in}\{0\})\cdot\mathbb{E}$ $_{\textit{-Prämisse }\mathbb{E}\textit{, def}}$ I IST WAHR UND 0 IST FALSCH ■

Leibniz-Universum:

$\mathbb{L}$ $_{\textit{Urteil}}$ $\mathbb{L}{=}\mathsf{I}$ $_{\textit{+Prämisse}}$ $\mathbb{L}{=}\mathsf{I}\cdot\mathbb{E}$ $_{\textit{B}}$ $\mathbb{L}{=}\mathbb{E}$ ■

(2) $(\mathsf{I}{=}F[X])\Rightarrow(\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}\circ F[X]{=}\mathcal{P}X)$:

$\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}\circ F[X]$ $_{\textit{Bild vom Bild}}$ $\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}[F[X]]$ $_{\textit{hyp}}$ $\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}[\mathsf{I}]$ $_{\textit{def}}$ $\mathsf{Im}(\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X})$ $_{\textit{Einschränkung}}$
$\mathsf{Id}[\mathcal{P}X]$ $_{\textit{identisches Bild}}$ $\mathcal{P}X$ ■

(3) $\mathsf{I}{\notin}\mathbb{B}$ $_{\textit{indirekt}}$: $\mathsf{I}{\in}\mathbb{B}$ $_{\textit{erfüllt}}$ $\exists f{:}((\mathsf{I}{=}f(x))\cdot(x{\in}\mathbb{M}))$ $_{(2)}$ $\exists f{:}((\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}x}\circ f[x]{=}\mathcal{P}X)\cdot(x{\in}\mathbb{M}))$
$_{\textit{kein Bild-falsch}}$ $\exists f{:}(0\cdot(x{\in}\mathbb{M}))$ $_{\textit{ungebunden B}}$ 0 ■

Transzendenz:

$\mathbb{L}$ $_{\textit{die Wahrheit existiert, def}}$ $\mathsf{I}{\in}\mathsf{I}$ $_{\textit{Leibniz-Universum}}$ $\mathsf{I}{\in}\mathbb{L}$ $_{\textit{real +(3)}}$ $(\mathsf{I}{\in}\mathsf{I})\cdot(\mathsf{I}{\notin}\mathbb{B})$ $_{\textit{Ausnahme}}$ $\mathsf{I}{\in}\neg\mathbb{B}$ $_{\textit{def}}$
$\mathsf{I}{\in}\mathbb{T}$ $_{\textit{real}}$ $\mathsf{I}{\in}\mathsf{I}$ $_{\textit{die Wahrheit existiert}}$ $\mathbb{L}$ ■

Die Existenz der Wahrheit tangiert die Theologik der *Monadologie* [1], in der Leibniz einen korrekten Gottesbeweis führte mit einer Definition äquivalent zu GOTT$=\{\mathsf{I}\}$; er ist im Abschnitt zur universellen philosophischen Sprache in [5] [240] und bereits in [3] analysiert. In seiner binären Logik hat die Existenz der Wahrheit jedoch eine weiter reichende Wirkung: Sie erzeugt die **Wahrheitshierarchie**, eine immanente Welt, rekursiv generiert durch vertauschte Wahrheitswerte. Sie ist so mächtig wie die Mengenwelt, weil sie eine bijektive Projektion von Neumanns Hierarchie in eine Klasse abbildbarer Nichtmengen ist. Dies folgt als Korollar aus einem allgemeinen Satz für Hierarchien, die von einer transzendenten Klasse erzeugt werden:

Theoreme:	
$A{\in}\mathbb{T} \Rightarrow (\mathbb{M}{\subset}\mathbb{B})\cdot(\mathbb{B}{\subset}\mathsf{I})$	*höheres Universum*
$A{\in}\mathbb{T} \Rightarrow V_A(X'){=}\{A\}\cup\mathcal{P}V_A(X)\setminus\{0\}$	*reguläre Ränge*
$A{\in}\mathbb{T} \Rightarrow (\mathbb{V}_A{\subseteq}\neg\mathbb{M})\cdot(\mathbb{V}_A{\subseteq}\neg\mathbb{V}_0)$	*mögliche Welten*

Theoreme in $\mathbb{L}$:	
I IST TRANSZENDENT	*Transzendenz*
$X{\in}\mathbb{O} \Rightarrow V_{\mathsf{I}}(X'){=}\{\mathsf{I}\}\cup\mathcal{P}V_{\mathsf{I}}(X)\setminus\{0\}$	*regulärer Wahrheitsrang*
$V_{\mathsf{I}}(1){=}\{\mathsf{I}\}$	*Wahrheitsrang 1*
$V_{\mathsf{I}}(2){=}\{\mathsf{I},\{\mathsf{I}\}\}$	*Wahrheitsrang 2*
$V_{\mathsf{I}}(3){=}\{\mathsf{I},\{\mathsf{I}\},\{\{\mathsf{I}\}\},\{\mathsf{I},\{\mathsf{I}\}\}\}$	*Wahrheitsrang 3*
$\mathbb{V}_{\mathsf{I}}{\subseteq}\mathbb{B}\cup\{\mathsf{I}\}$	*Immanenz*
$(\mathbb{V}_{\mathsf{I}}{\subseteq}\neg\mathbb{M})\cdot(\mathbb{V}_{\mathsf{I}}{\subseteq}\neg\mathbb{V}_0)$	*übernatürliche Welt*

Beweise:

(1) $A{\in}\mathbb{T}{\Rightarrow}A{\notin}\mathbb{M}$:

$_{indirekt}$ $A{\in}\mathbb{M}$ $_{Bildart}$ $A{\in}\mathbb{B}$ $_{hyp\text{-}def\text{-}Ausnahme\text{-}falsch}$ 0 ■

höheres Universum:

$\underline{\mathbb{B}{\neq}I}$ $_{indirekt}$: $\mathbb{B}{=}I$ $_{>hyp}$ $A{\notin}I$ $_{hyp\text{-}real\text{-}falsch}$ 0; $_{extrem\ +U1}$ $(\mathbb{B}{\subseteq}I){\cdot}(\mathbb{B}{\neq}I)$ $_{def}$ $\mathbb{B}{\subset}I$ ■
$\underline{\mathbb{M}{\neq}\mathbb{B}}$ $_{indirekt}$: $\mathbb{M}{=}\mathbb{B}$ $_{>elementar}$ $\{A\}{\in}\mathbb{M}$ $_{Mengen\ von\ Mengen\ +hyp\text{-}existent}$ $(A{\in}\{A\}){\cdot}(\{A\}{\subseteq}\mathbb{M})$ $_{Syllogismus}$ $A{\in}\mathbb{M}$ $_{(1)\text{-}falsch}$ 0; $_{Bildart\ +U3}$ $(\mathbb{M}{\subseteq}\mathbb{B}){\cdot}(\mathbb{M}{\neq}\mathbb{B})$ $_{def}$ $\mathbb{M}{\subset}\mathbb{B}$ ■

(2) $A{\notin}\mathbb{B}{\Rightarrow}\forall x{\in}\mathbb{O}{:}(A{\nsubseteq}V_A(x))$.

$_{generell,\ indirekt}$ $A{\subseteq}V_A(X)$ $_{Realrang}$ $(A{\subseteq}V_A(X)){\cdot}(V_A(X){\in}\mathbb{B})$ $_{Teilbild}$ $A{\in}\mathbb{B}$ $_{hyp1\text{-}falsch}$ 0 ■

reguläre Ränge:

$A{\in}\mathbb{T}$ $_{def}$ $A{\in}\neg\mathbb{B}$ $_{Ausnahme}$ $(A{\in}I){\cdot}(A{\notin}\mathbb{B})$ $_{(2)}$ $(A{\in}I){\cdot}\forall x{\in}\mathbb{O}{:}(A{\nsubseteq}V_A(x))$ $_{regul\ddot{a}rer\ Rang}$ $V_A(X'){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X)\backslash\{0\}$ ■

(3) $(R{\subseteq}\neg\mathbb{M}){\cdot}(R{\neq}0){\Rightarrow}R{\notin}\mathbb{M}$:

$_{indirekt}$: $R{\in}\mathbb{M}$ $_{Mengen\ von\ Mengen}$ $R{\subseteq}\mathbb{M}$ $_{def\ +hyp1\text{-}def}$ $(R{=}R{\cdot}\mathbb{M}){\cdot}(R{=}R{\cdot}\neg\mathbb{M})$ $_{Tausch}$ $R{=}R{\cdot}\neg\mathbb{M}{\cdot}\mathbb{M}$ $_{B}$ $R{=}0$ $_{hyp2\text{-}falsch}$ 0 ■

(4) $A{\in}\mathbb{T}\ \Rightarrow\ X{\in}\mathbb{O}{\Rightarrow}(V_A(X){\subseteq}\neg\mathbb{M})$ mit $f_X{:=}V_A(X){\subseteq}\neg\mathbb{M}$ $_{transfinite\ Induktion}$:

Startfall f_0: $_{extrem}$ $0{\subseteq}\neg\mathbb{M}$ $_{Startrang}$ $V_A(0){\subseteq}\neg\mathbb{M}$ ■

Zählfall $X{\in}\mathbb{O}{\Rightarrow}(f_X{\Rightarrow}f_{X'})$: $f_{X'}$ $_{frei}$: $\underline{Y{\in}V_A(X')}$ $_{regul\ddot{a}re\ R\ddot{a}nge,\ Teilrangvariante}$
$(Y{=}A){\vee}(Y{\subseteq}V_A(X)){\cdot}(X{\neq}0)$ $_{disjunktiv:\ Z\ddot{a}hlfall\text{-}hyp2\ transitiv}$
$(Y{=}A){\vee}(Y{\subseteq}\neg\mathbb{M}){\cdot}(X{\neq}0)$ $_{disjunktiv:\ (1)(hyp)\ (3),\ B}$ $Y{\notin}\mathbb{M}$ $_{Ausnahme\ (U\text{-}real)}$ $Y{\in}\neg\mathbb{M}$ ■

Grenzfall $X{\in}\mathbb{O}{\Rightarrow}((X{=}\bigcup X){\cdot}\forall z{\in}X{:}f_z{\Rightarrow}f_X)$: $_{f_X\,frei}$: $Y{\in}V_A(X)$ $_{Grenzrang}$
$Y{\in}\bigcup V_A[X]$ $_{Vorrang}$ $\exists z{\in}X{:}(Y{\in}V_A(z))$ $_{+hyp3\text{-}speziell\ f_z\ Syllogismus}$ $Y{\in}\neg\mathbb{M}$ ■

mögliche Welten:

$_{frei}$: $X{\in}\mathbb{V}_A$ $_{def}$ $X{\in}\bigcup V_A[\mathbb{O}]$ $_{Vorrang\ (hyp)}$ $\exists z{\in}\mathbb{O}{:}(X{\in}V_A(z))$ $_{+(4)\ Syllogismus,\ ungebunden}$ $X{\in}\neg\mathbb{M}$ ■

$_{m\ddot{o}gliche\ Welten1}$ $\mathbb{V}_A{\subseteq}\neg\mathbb{M}$ $_{+Mengenhierarchie\ Kontraposition(B)}$ $(\mathbb{V}_A{\subseteq}\neg\mathbb{M}){\cdot}(\neg\mathbb{M}{\subseteq}\neg\mathbb{V}_0)$ $_{transitiv}$ $\mathbb{V}_A{\subseteq}\neg\mathbb{V}_0$ ■

Die Wahrheitshierarchie ist auch ein Teil von Peanos komplementärer Logik $\mathbb{K}$, in der $\mathbb{L}$ bereits bewiesen wurde. In seiner Logik existieren Komplemente aller Mengen und aller realen Klassen. Somit gibt es immens mehr potentielle Bilder und isomorphe Hierarchien. Aus Sicht der üblichen Mengenlehre ist dies ein Multiversum, eingebettet in ein höheres transzendentes Universum.

References

[1] Leibniz, G.W.: Monadologie, 1714.
https://fr.wikisource.org/wiki/Monadologie
https://www.projekt-gutenberg.org/leibniz/monaden/monaden.html = deutsche Übersetzung 1720.
Die Existenz (substance) von Individuen (monads) §1, ihrer Vereinigung (aggregatum) §2, von Falschem und Wahrem §31, von identischen Aussagen §35. Gottesdefinition (Dieu=substance nécessaire) §38. Monotheistischer Gottesbeweis (il n'y a qu'un Dieu) §39.

[2] Neumaier, Wilfried: Aristotelische Logiken, Olms, Hildesheim, Zürich, New York, 2013; pp. 67ff Ableitung der Aussagenkalküle von Frege/Lukasiewicz und Russell/Bernays.
Inhalt: https://neumaier-wilfried.de/logik

[3] Neumaier, Wilfried: Universum und Individuum - logisch betrachtet, in: Natur und Subjekt, IX. Internationaler Leibniz-Kongress, Hannover 2011, Vorträge 2. Teil, 729-737.

[4] Neumaier, Wilfried: Universallogik. Eine Synthese klassischer Logiken von Aristoteles, Leibniz, Boole, Frege, Peano, Cantor, Zermelo, Olms, Hildesheim, Zürich, New York, 2020.
Inhalt: https://neumaier-wilfried.de/logik

[5] Neumaier, Wilfried: Verbale Logik. Ein Grammatik-Kalkül nach Ideen von Leibniz und Peano, [4, Teil II, p.187–266].
Inhalt: https://neumaier-wilfried.de/logik

[6] Peano, Giuseppe: Logique mathématique = Formulaire de Mathématiques, Tome II, §1, Turin 1897.
https://archive.org/details/formulairedemat02peangoog
Axiome in (22)(105) und Prämisse $\{A\}\in\mathbb{K}$ im Beweis von (422).