Booles originale Syllogistik

Wilfried Neumaier

Boole führte 1847 in seinem Buch *The mathematical Analysis of Logic* die algebraische Logik ein. Er rechnete in der normalen Algebra und benützte ausdrücklich alle dort gegebenen Rechenverfahren![1] Es ist ein Potenzreihenring über reellen Zahlen und keine moderne boolesche Algebra und kein boolescher Ring, die erst viel später kreiert wurden. Es ist also die aus der Schule bekannte Algebra. Daher wird hier später in Beweisschritten mit den bekannten Rechenregeln nur das Argument *Ring* vermerkt. Boole nannte nur das Distributiv- und Kommutativgesetz.[2] Letzteres hat Tradition in der Syllogistik und wird entsprechend benannt:

$X{\cdot}Y{=}Y{\cdot}X$ ***m**utation*   *m*   (1)

In der Schulalgebra sonderte Boole nun einen Logikbereich aus mit Auswahlsymbolen x, y, z, Auswahlfunktionen und Auswahlgleichungen, für die zusätzlich das Idempotenzgesetz gilt.[3] Offenbar erfüllen genau zwei Zahlen dieses Gesetz: 1 und 0 sind die einzigen idempotenten Zahlen.[4] Andere reelle Zahlen gehören nicht zum logischen Bereich und erst recht nicht alle Algebra-Terme (Funktionen). Eben darum sprach er von Auswahlsymbolen und Auswahlfunktionen. Zu ihnen gehört offenbar die Multiplikation:

Axiom: (2)

$X{\cdot}X{=}X$ *idempotent*

Theorem (trivial):   (3)

$(X{\cdot}Y){\cdot}(X{\cdot}Y){=}X{\cdot}Y$ *idempotente Multiplikation*

Der logische Bereich ist somit eine multiplikativ abgeschlossene Teilstruktur. Hier gelten alle Logikaxiome nach Aristoteles [*A* 15]. Daher kann man in diesem Bereich alle Logiktheoreme aus [*A*] nutzen und auch die dort gewählte Darstellung, insbesondere die stilisierten Bits **I** und 0, den Malpunkt und freie logische Variablen X, Y, Z... als freie Auswahlsymbole. Diese Notation wird hier angewandt, sobald man sich im logischen Bereich bewegt. Nur wenn dieser überschritten wird, was in Booles Beweisen der Fall sein kann, werden die Rechensymbole + und − des Rings benutzt. Der logische Bereich ist nämlich kein Teilring, denn die Addition 1+1=2 und die Differenz 0−1= −1 führen

---

[1] [Boole 18] normale Algebra mit allen üblichen Rechenverfahren, Größen (reell), Potenzreihen (MacLaurin-Reihen S.60), Differentialgleichungen.

[2] [Boole 16f]

[3] [Boole 16] elective symbols, elective function, elective equitation.
[Boole 17] *xx*=*x* (index law).

[4] [Boole 82]

über ihn hinaus. Beide Operationen sind nicht idempotent und keine Auswahlfunktionen. Es stört nicht, dass sie den logischen Bereich sprengen, da dieser in die normale Algebra eingebettet ist. Nachfolger Booles kritisieren das,[5] aber es ist mathematisch korrekt, auch wenn Zwischenschritte in seinen Beweisen keine logischen Terme sind. Boole definierte natürlich logische Operatoren nur durch idempotente Auswahlfunktionen, etwa die Negation und die Implikation, so dass nachweislich auch die klassischen Axiome des Aristoteles gelten, nämlich der Satz vom Widerspruch und die *reductio ad absurdum*, der indirekte Beweis.

Definitionen:[6] (4)

NICHT $X := \neg X := \mathbf{1}-X$	*Negation*	
WENN $X, Y := X \Rightarrow Y := X\cdot(\mathbf{1}-Y)$	*Implikation*	

Theoreme:[7] (5)

$\neg X\cdot\neg X=\neg X$	*idempotente Negation*	
$(X\Rightarrow Y)=(X=X\cdot Y)$	*algebraische Implikation*	
$(X=Y)=(X-Y=0)$	*normiert*	
$(X=X\cdot Y)=(X\cdot Y=X)=(X\cdot(\mathbf{1}-Y)=0)=(X\cdot\neg Y=0)$	*normiert*	
$X\cdot\neg X=0$	*Widerspruch*	*klassische Axiome*
$(X\cdot\neg Y\Rightarrow 0)=(X\Rightarrow Y)$ $a\cdot\neg b\Rightarrow 0 \dashv\vdash a\Rightarrow b$	*indirekt*	*klassische Axiome*

Boole hatte damit eine elegante algebraische Basis für die Logik gefunden, in der man alles in bekannten Formeln ausdrücken kann und alles mit bekannten Rechenregeln beweisen kann. Man musste nur noch die logischen Definitionen beachten und deren Idempotenz nachweisen. Er definierte auch beide Formen der Disjunktion durch Auswahlfunktionen: *x oder y* $= x+y-xy$ und *entweder x oder y* $= x+2xy-y$.[8] Beide sind nachweislich idempotent, wie man leicht nachrechnet. Er brauchte sie aber erst im zweiten Teil zur Behandlung der Aussagenlogik. Zu seiner mathematischen Analyse der traditionellen Syllogistik, die dieser Aufsatz genau darstellen will, kam er ohne diese logischen Verknüpfungen aus. Hier im ersten Teil seines Buchs nutzte er seine Algebra nur als Termlogik. Sie ist bei ihm die primäre Anwendung.

---

5 [Schröder: *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Vorwort III: Ballast der algebraischen Zahlen, nicht deutungsfähige Symbole wie 2, -1, 1/3, 1/0.

6 [Boole 20, 54(36)]

7 *idempotente Negation:* $\neg X\cdot\neg X \ {}_{\mathit{Def}}\ (\mathbf{1}-X)\cdot(\mathbf{1}-X) \ {}_{\mathit{Ring}}\ \mathbf{1}-2X+X\cdot X \ {}_{\mathit{idempotent}}\ \mathbf{1}-2X+X \ {}_{\mathit{Ring}}\ \mathbf{1}-X \ {}_{\mathit{Def}}\ \neg X$.
normiert: $X=Y \ {}_{\mathit{additiv}}\ X-Y=Y-Y \ {}_{\mathit{Ring}}\ X-Y=0$.
[Boole 21 (4)]: $X\cdot Y=X \ {}_{\mathit{symmetrisch}}\ X=X\cdot Y \ {}_{\mathit{normiert}}\ X-X\cdot Y=0 \ {}_{\mathit{Ring}}\ X\cdot(\mathbf{1}-Y)=0 \ {}_{\mathit{Def}}\ X\cdot\neg Y=0$.
algebraische Implikation: $X\Rightarrow Y \ {}_{\mathit{Def}}\ X\cdot(\mathbf{1}-Y)=0 \ {}_{\mathit{normiert}}\ X=X\cdot Y$.
Widerspruch: $X\cdot\neg X \ {}_{\mathit{Def}}\ X\cdot(\mathbf{1}-X) \ {}_{\mathit{Ring}}\ X-X\cdot X \ {}_{\mathit{idempotent}}\ X-X \ {}_{\mathit{Ring}}\ 0$.
indirekt: $X\cdot\neg Y\Rightarrow 0 \ {}_{\mathit{algebraische\ Implikation}}\ X\cdot\neg Y=(X\cdot\neg Y)\cdot 0 \ {}_{\mathit{Ring}}\ X\cdot\neg Y=0 \ {}_{\mathit{Def}}\ X\Rightarrow Y$.

8 [Boole 51 (29), 52 (31)]

Boole zitierte öfter die damals aktuellste aristotelische Logik im englischen Sprachraum: Whately's *Elements of Logic* von 1826.[9] Dieses Buch enthielt eine Neuerung: Whately führte wohl als erster die klassenlogische Deutung der aristotelischen Termlogik ein und bezeichnete einen Term oft als ‚class'.[10] Diese Sprechweise übernahm Boole. Er redete dann oft von ihren ‚individuals' und ‚members', also von ihren Elementen, ohne aber für sie irgendwelche Formeln einzuführen. Die Klassenidee und die extensionale Intuition ist nur im Kommentar ständig präsent. Gleich am Anfang führte er Auswahlsymbole für elementhaltige Klassen ein.[11] Solch ein Auswahlsymbol v benutzte er bei kategorischen Aussagen zur Benennung einer Auswahlfunktion mit gedachtem Existenzquantor. Andere benutzte er als generelle gebundene Variablen, die dann die Elementhaltigkeit ausdrücken. Die Präzisierung seiner Syllogistik erfordert daher auch Quantoren, die es damals noch nicht gab. Er bildete mit seinen gedachten Quantoren aber keine kompliziert verschachtelten Terme, wie später Frege im ersten Quantorenkalkül, sondern nahm nur äußere gedachte Quantoren an, wie es in der Mathematik noch heute oft praktiziert wird. Dies legalisiert eine Notationskonvention, die hier genutzt wird im Rahmen eines präzisen Klassenlogikkalküls nach Peano, der in der Boole-Tradition stand [U 49].

Schreibweise: (6)

Freie Variablen, in die beliebige Terme eingesetzt werden dürfen, werden groß geschrieben $A\ B\ C\ \dots\ X\ Y\ Z$. Unbestimmte oder gebunden Variablen werden klein geschrieben $a\ b\ c\ \dots\ x\ y\ z$.

Aussagen $\forall x{:}a$ oder $\forall x,y{:}a$ oder $\forall x,y,z{:}a$ mit führenden Allquantoren werden als a notiert, aber nicht innerhalb einer anderen Formel. Die Unbestimmten (gebundenen Variablen), die in a vorkommen, sind durch andere Unbestimmte umbenennbar per Definition, außer durch die Unbestimmte v, die reserviert ist für Aussagen $\exists v{:}b$, die als b notiert wird, aber nicht innerhalb einer anderen Formel.

Diese Schreibweise ist unmissverständlich, da gebundene Variablen nie mit freien Variablen verwechselt werden können. In Beweisen quantorfrei notierter gebundener Aussagen können dann quantorfrei notierte Theoreme direkt angewandt werden, wie es Boole praktizierte und es auch heute noch in der Mathematikpraxis üblich ist.

Boole gebrauchte Gleichungen nur als Regeln, denn es sind keine Terme der Schulalgebra, und definierte mit solchen die universellen kategorischen Aussagen. Die partikulären Aussagen, die er dann nicht negieren konnte, weil dies nur mit Termen geht, definierte er mit Gleichungen, die das Auswahlsymbol v mit gedachtem Existenzquantor einführen:

---

9 [Boole 7, 21, 28] Whately erwähnt.

10 [Whately 36] und später immer wieder.

11 [Boole 9] ganz am Anfang.

Definitionen:[12] (7)

ALLE X SIND $Y := X \mathrm{a} Y := X\cdot(\mathbf{I}-Y)=0$	*universelle Aussagen*
KEINE X SIND $Y := X \mathrm{e} Y := X\cdot Y=0$	
EINIGE X SIND $Y := X \mathrm{i} Y := (v=X\cdot Y)$	*partikuläre Aussagen*
EINIGE X SIND NICHT $Y := X \mathrm{o} Y := (v=X\cdot(\mathbf{I}-Y))$	

Dass v ein elementhaltiges Auswahlsymbol ist, sagte Boole anfangs eher beiläufig. Es folgt aber auch aus einem Axiom, das er später explizit angab: „$t_1=0$ etc. drückt die Verneinung der Existenz einer so definierten Klasse aus".[13] Da logische Funktionen t_1 etc. durch die klassischen Operatoren erzeugt werden, ist sein Existenzkriterium nur für sie festzuhalten, und zwar mit generell gebundenen Variablen nach obiger Schreibweise, die hier selbstverständlich auch für bewiesene Theoreme angewandt wird:

Axiome: (8)

$(x\cdot y=0)=x\cdot y\notin\mathbf{I}$		*inexistente Konjunktion*
$(\mathbf{I}-y=0)=(\mathbf{I}-y)\notin\mathbf{I}$		*inexistente Negation*

Theoreme:[14] (9)

$(x\cdot y\neq 0)=x\cdot y\in\mathbf{I}$		*existente Konjunktion*
$(\mathbf{I}-y\neq 0)=(\mathbf{I}-y)\in\mathbf{I}$	$(\neg y\neq 0)=\neg y\in\mathbf{I}$	*existente Negation*
$x\in\mathbf{I}$ $\quad x\neq 0$		*electiv*
$0\notin\mathbf{I}$		*irreale Leerklasse*
$\mathbf{I}\in\mathbf{I}$		*reales Universum*
$x\,\mathrm{i}\,y=(x\cdot y\neq 0)$	$x\,\mathrm{o}\,y=(x\cdot(\mathbf{I}-y)\neq 0)$	*partikulär synonym*

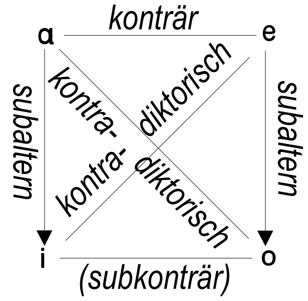
Damit ist die logische Basis seiner Termlogik im heute üblichen Exaktheitsanspruch formuliert und alles vorbereitet, um seine Syllogistik genau nachzuvollziehen.

---

12 [Boole 21f (4)(5)(6)(7)]

13 [Boole 65, 77]

14 *existente Konjunktion*: *inexistente Konjunktion* $(x\cdot y=0)=x\cdot y\notin\mathbf{I}$ *Def* $(x\cdot y=0)=(\mathbf{I}-(x\cdot y\in\mathbf{I})$ *kongruent* $\mathbf{I}-(x\cdot y=0)=\mathbf{I}-(\mathbf{I}-(x\cdot y\in\mathbf{I}))$ *Ring Def* $(x\cdot y\neq 0)=x\cdot y\in\mathbf{I}$.
existente Negation: *inexistente Negation* $(\mathbf{I}-y=0)=(\mathbf{I}-y)\notin\mathbf{I}$ *Def* $(\mathbf{I}-y=0)=(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-y)\in\mathbf{I})$ *kongruent* $\mathbf{I}-(\mathbf{I}-y=0)=(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-y)\in\mathbf{I}))$ *Ring Def* $(\mathbf{I}-y\neq 0)=(\mathbf{I}-y)\in\mathbf{I}$ *Def* $(\neg y\neq 0)=\neg y\in\mathbf{I}$.
elective Symbol: *Kasse* $\{x|x\in\mathbf{I}\}=\mathbf{I}$ *Def (Peano)* $\forall x{:}(x\in\mathbf{I})$ *Schreibweise* $x\in\mathbf{I}$ *idempotent* $x\cdot x\in\mathbf{I}$ *existente Konjunktion (UL)* $x\cdot x\neq 0$ *idempotent* $x\neq 0$.
irreale Leerklasse: *reflexiv idempotent* $0\cdot 0=0$ *inexistente Konjunktion* $0\cdot 0\notin\mathbf{I}$ *idempotent* $0\notin\mathbf{I}$.
reales Universum: *Ring (übliche Algebra)* $\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}\neq 0$ *existente Konjunktion* $\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}\in\mathbf{I}$ *idempotent* $\mathbf{I}\in\mathbf{I}$.
$\boxed{1}$ $(A\in\mathbf{I})\cdot(x\cdot A\neq 0)\Rightarrow x\cdot A\in\mathbf{I}$: *existente Konjunktion (notiert mit Quantor)* $\forall x{:}\forall y{:}((x\cdot y\neq 0)=x\cdot y\in\mathbf{I})$ *Hpy2* $\forall x{:}(A\in\mathbf{I})\cdot\forall y{:}((x\cdot y\neq 0)=x\cdot y\in\mathbf{I})$ *speziell* $\forall x{:}((x\cdot A\neq 0)=x\cdot A\in\mathbf{I})$ *-Hpy1 quantorfrei* $\mathbf{I}=x\cdot A\in\mathbf{I}$ *Aussage* $x\cdot A\in\mathbf{I}$
partikulär synonym *zirkulär*: $x\,\mathrm{i}\,y$ *Def* $v=x\cdot y$ *+electiv* $(v=x\cdot y)\cdot(v\neq 0)$ *Tausch>* $x\cdot y\neq 0$ *frei* $x\cdot y\neq 0$ *existente Konjunktion +reflexiv* $(x\cdot y\in\mathbf{I})\cdot(x\cdot y=x\cdot y)$ *∃Einführung laut* (6) $v=x\cdot y$ *Def* $x\,\mathrm{i}\,y$. Und *zirkulär*: $x\,\mathrm{o}\,y$ *Def* $v=x\cdot(\mathbf{I}-y)$ *+electiv* $(v=x\cdot(\mathbf{I}-y))\cdot(v\neq 0)$ *Tausch>* $x\cdot(\mathbf{I}-y)\neq 0$ *positiv=* $(x\cdot(\mathbf{I}-y)\neq 0)\cdot(\mathbf{I}-y\neq 0)$ *existente Negation* $(x\cdot(\mathbf{I}-y)\neq 0)\cdot(\mathbf{I}-y\in\mathbf{I})$ $\boxed{1}$ *+reflexiv* $(x\cdot(\mathbf{I}-y)\in\mathbf{I})\cdot(x\cdot(\mathbf{I}-y)=x\cdot(\mathbf{I}-y))$ *∃Einführung laut* (6) $v=x\cdot(\mathbf{I}-y)$ *Def* $x\,\mathrm{o}\,y$.



Boole bewies zunächst die Konversionen der traditionellen Syllogistik:[15] Die *Kontraposition* und *conversio simplex* gelten für alle Klassen auch für leere, die *conversio per accidens* und die *kontradiktorischen* und *subalternen* Beziehungen des logischen Quadrats dagegen nur für gebundene Auswahlsymbole. Diese altbekannten Regeln ergänzte er durch die *Objektnegation* und beweistechnische Umformungen:

Theoreme:[16] (10)

$X\mathrm{a}Y=\neg Y\mathrm{a}\neg X$	$X\mathrm{o}Y=\neg Y\mathrm{o}\neg X$	*Kontraposition*	
$X\mathrm{i}Y=Y\mathrm{i}X$	$X\mathrm{e}Y=Y\mathrm{e}X$	*conversio* ***s****implex*	*s*
$x\mathrm{a}y\Rightarrow y\mathrm{i}x$		*conversio* ***p****er accidens*	*p*
$x\mathrm{o}y=\neg(x\mathrm{a}y)$	$x\mathrm{i}y=\neg(y\mathrm{e}x)$	*kontradiktorisch*	*c mit indirekt*
$x\mathrm{e}y=\neg(y\mathrm{i}x)$	$x\mathrm{a}y=\neg(x\mathrm{o}y)$		
$x\mathrm{a}y\Rightarrow x\mathrm{i}y$	$x\mathrm{e}y\Rightarrow x\mathrm{o}y$	*subaltern*	
$X\mathrm{a}Y=X\mathrm{e}\neg Y$	$X\mathrm{e}Y=X\mathrm{a}\neg Y$	*Objektnegation*	
$X\mathrm{o}Y=X\mathrm{i}\neg Y$	$X\mathrm{i}Y=X\mathrm{o}\neg Y$		
$x\mathrm{i}y=\exists v{:}((v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot y))$		*i-Form*	
$x\mathrm{i}y=\exists v{:}((v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x\cdot(\mathbf{I}-y)=0))$			
$x\mathrm{o}y=\exists v{:}((v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x\cdot y=0))$		*o-Form*	
$x\mathrm{o}y=\exists v{:}((v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot(\mathbf{I}-y)))$			
$A\cdot Y+B=0,\ C\cdot Y+D=0\Rightarrow A\cdot D-C\cdot B=0$		*Y-Elimination*	

15 [Whately 82-86]

16 [Boole 27] *Kontraposition*: $X\mathrm{a}Y\ _{Def}\ X\cdot(\mathbf{I}-Y)=0\ _{Ring}\ (\mathbf{I}-Y)\cdot(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-X))=0\ _{Def}\ \neg Y\mathrm{a}\neg X$; und: $X\mathrm{o}Y\ _{Def}\ v=X\cdot(\mathbf{I}-Y)\ _{Ring}\ (v=(\mathbf{I}-Y)\cdot(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-X))\ _{Def}\ \neg Y\mathrm{o}\neg X$.

[Boole 27] *conversio simplex s*: $X\mathrm{i}Y\ _{Def}\ v=X\cdot Y\ _{m}\ v=Y\cdot X\ _{Def}\ Y\mathrm{i}X$; und: $X\mathrm{e}Y\ _{Def}\ X\cdot Y=0\ _{m}\ Y\cdot X=0\ _{Def}\ Y\mathrm{e}X$.

[Boole 27f] *conversio per accidens p, subaltern*: $x\mathrm{a}y\ _{a\text{-}Synonym}\ x=x\cdot y\ _{+electiv}\ (x\in\mathbf{I})\cdot(x=x\cdot y)\ _{\exists Einführung\ laut\ (6)}\ v=x\cdot y\ _{Def}\ x\mathrm{i}Y\ _{s}\ Y\mathrm{i}x$.

kontradiktorisch: $x\mathrm{i}y\ _{partikulär\ synonym}\ x\cdot y\neq 0\ _{Def}\ \neg(x\mathrm{e}y)$; $x\mathrm{e}y\ _{BL}\ \neg\neg(x\mathrm{e}y)\ _{kontradiktorisch1}\ \neg(x\mathrm{i}y)$; und: $x\mathrm{o}y\ _{partikulär\ synonym}\ x\cdot(\mathbf{I}-y)\neq 0\ _{Def}\ \neg(x\mathrm{a}y)$; $x\mathrm{a}y\ _{BL}\ \neg\neg(x\mathrm{a}y)\ _{kontradiktorisch3}\ \neg(x\mathrm{o}y)$.

[Boole 29f] *Objektnegation*: $X\mathrm{a}Y\ _{Def}\ X\cdot(\mathbf{I}-Y)=0\ _{Def}\ X\mathrm{e}\neg Y$; $X\mathrm{e}Y\ _{Def}\ X\cdot Y=0\ _{Ring}\ X\cdot(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-Y))=0\ _{Def}\ X\mathrm{a}\neg Y$; $X\mathrm{o}Y\ _{Def}\ v=X\cdot(\mathbf{I}-Y)\ _{Def}\ X\mathrm{i}\neg Y$; $X\mathrm{i}Y\ _{Def}\ v=X\cdot Y\ _{Ring}\ v=X\cdot(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-Y))\ _{Def}\ X\mathrm{o}\neg Y$.

[Boole 22 (10), 25] *i-Form* $_{zirkulär}$: $x\mathrm{i}y\ _{Def}\ v=x\cdot y\ _{kongruent}\ (v\cdot x=x\cdot y\cdot x)\cdot(v\cdot y=x\cdot y\cdot y)\ _{Ring\ idempotent}\ (v\cdot x=x\cdot y)\cdot(v\cdot y=x\cdot y)\ _{Ersetzen\ Hyp}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot y)\ _{Tausch}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot x\cdot y)\ _{+electiv}\ (v\neq 0)\cdot(v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot x\cdot y)\ _{2x\ Tausch}\ v\cdot x\cdot y\neq 0\ _{positiv\ frei}\ x\cdot y\neq 0\ _{partikulär\ synonym}\ x\mathrm{i}y$; $x\mathrm{i}y\ _{Objektnegation}\ x\mathrm{o}\neg y\ _{Def\ o\text{-}Form1\ (s.u.)}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x\cdot(\mathbf{I}-y)=0)$.

[Boole 23 (13), 25] *o-Form* $_{zirkulär}$: $x\mathrm{o}y\ _{Objektnegation}\ x\mathrm{i}\neg y\ _{i\text{-}Form1}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot(\mathbf{I}-y))\ _{kongruent}\ (v=v\cdot y)\cdot(v\cdot x\cdot y=v\cdot(\mathbf{I}-y)\cdot y)\ _{Ring\ idempotent}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x\cdot y=0)\ _{BL}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x\cdot\neg\neg y=0)\ _{normiert}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=\neg y)\ _{kongruent\ idempotent\ Def}\ (v=v\cdot x)\cdot(v\cdot x=v\cdot(\mathbf{I}-y))\ _{i\text{-}Form1}\ x\mathrm{i}\neg y\ _{Objektnegation}\ x\mathrm{o}y$.

[Boole 33 (15)] *Elimination:* $A\cdot Y+B=0,\ C\cdot Y+D=0\ _{kongruent}\ C\cdot(A\cdot Y+B)=C\cdot 0,\ A\cdot(C\cdot Y+D)=A\cdot 0\ _{Ring}\ A\cdot C\cdot Y+B\cdot C=0,\ A\cdot C\cdot Y+A\cdot D=0\ _{kongruent}\ A\cdot C\cdot Y+A\cdot D-(A\cdot C\cdot Y+C\cdot B)=0-0\ _{Ring}\ A\cdot D-C\cdot B=0$.

Boole zitierte den scholastischen Merkvers für 19 Syllogismen in Whatelys Version.[17] Er ergänzte zu jeder Figur Syllogismen mit konvertierter Konklusion; sie sind trivial beweisbar per Variablen- und Prämissentausch *m*:

Theoreme mit u, v, w für a, e, i, o	Vokal-Codes:	(11)
$(YuX)\cdot(ZvY)\Rightarrow ZwX$ ⫞⊫ $(XvY)\cdot(Yub)\Rightarrow XwZ$	$1uvw \sim 4{*}vuw$	change of order
$(XuY)\cdot(ZvY)\Rightarrow ZwX$ ⫞⊫ $(XvY)\cdot(buY)\Rightarrow XwZ$	$2uvw \sim 2{*}vuw$	
$(YuX)\cdot(YvZ)\Rightarrow ZwX$ ⫞⊫ $(YvX)\cdot(Yub)\Rightarrow XwZ$	$3uvw \sim 3{*}vuw$	
$(XuY)\cdot(YvZ)\Rightarrow ZwX$ ⫞⊫ $(YvX)\cdot(buY)\Rightarrow XwZ$	$4uvw \sim 1{*}vuw$	

Boole suchte zu kategorischen Prämissen jeweils die stärksten kategorischen Konklusionen. Er bewies sie aber nicht auf dem traditionellen Beweisweg nach den Konsonanten-Codes der Merknamen, die hier angefügt werden, sondern über Lösungen von Gleichungssystemen (präzisiert in der Fußnote).

---

[17] [Boole 31] zitiert stillschweigend, aber wörtlich die mnemnotic verses aus [Whately 98], *Figur 4*: brAmAntIp, cAmEnEs, dImArIs, fEsApO, frEsIsOn.

[18] Exemplarische Beweise präzisiert (<u>*Originalschritte*</u>), analoge ergänzt.
[Boole 34f Class 1st] <u>*Barbara*</u>: $(\underline{YaX})\cdot(\underline{ZaY})$ *Def* $(\underline{Y\cdot(1-X)=0})\cdot(\underline{Z\cdot(1-Y)=0})$ *Ring m* $(1-X)\cdot Y+0=0)\cdot(-Z\cdot Y+Z=0)$ <u>*Y-Elimination*</u> $(1-X)\cdot Z=0$ *komm* $\underline{Z\cdot(1-X)=0}$ *Def* ZaX.
Celarent, *1*eae(~Calemes)*: $(YeX)\cdot(ZaY)$ *Def* $(Y\cdot X=0)\cdot(Z\cdot(1-Y)=0)$ *Ring* $(X\cdot Y+0=0)\cdot(-Z\cdot Y+Z=0)$ *Y-Elimination* $X\cdot Z=0$ *komm Def* ZeX *s* XeZ.
<u>*Camestres*</u>, *2*aee(~Cesare)*: $(\underline{XaY})\cdot(\underline{ZeY})$ *Def* $(\underline{X\cdot(1-Y)=0})\cdot(\underline{Z\cdot Y=0})$ *m Ring* $(Z\cdot Y+0=0)\cdot(-X\cdot Y+X=0)$ *Y-Elimination* $\underline{Z\cdot X=0}$ *komm Def* $\underline{ZeX}$ *s* XeZ.
[Boole 35f Class 2nd] *3*aeo(~Felapton)*, <u>*1*aeo*</u>*(~Fesapo)*: $(yax)\cdot(yez)$ *s* $(\underline{yax})\cdot(\underline{zey})$ *a-Synonym Def* $(y=y\cdot x)\cdot(z\cdot y=0)$ *∃Einführung mit* (6) $(\underline{v=v\cdot x})\cdot(\underline{z\cdot v=0})$ *Tausch* $(v=v\cdot x)\cdot(z\cdot v\cdot x=0)$ *Ring* $(v=v\cdot x)\cdot(\underline{v\cdot x\cdot z=0})$ *o-Form* $\underline{xoz}$.
<u>*Darapti*</u>: $(\underline{yax})\cdot(\underline{yaz})$ *a-Synonym Def* $(\underline{y=y\cdot x})\cdot(\underline{y\cdot(1-z)=0})$ *Tausch* $(y=y\cdot x)\cdot(\underline{y\cdot x\cdot(1-z)=0})$ *∃Einführung mit* (6) $(\underline{v=v\cdot x})\cdot(\underline{v\cdot x\cdot(1-z)=0})$ *i-Form* $\underline{xiz}$ *s* zix.
„nicht nach aristotelischen Regeln bestimmbar“ 1eeo 2eeo 3eeo <u>*4eeo*</u>: $(yex)\cdot(zey)$ *s* $(xey)\cdot(zey)$ *s* $(xey)\cdot(yez)$ *s* $(\underline{yex})\cdot(\underline{yez})$ *m Objektnegation* $(ya\neg z)\cdot(yex)$ *a-Synonym Def* $(\underline{y=y\cdot(1-z)})\cdot(\underline{y\cdot x=0})$ *∃Einführung*(6)$(v=v\cdot(1-z))\cdot(v\cdot x=0)$ *Tausch* $(v=v\cdot(1-z))\cdot(\underline{v\cdot(1-z)\cdot x=0})$ *Def o-Form* $\neg zox$.
[Boole 36f Class 3rd] *3*aii(~Disamis)*, *Datisi*, *1*aii(~Dimatis)*, <u>*Darii*</u>: $(\underline{yax})\cdot(\underline{yiz})$ *s* $(yax)\cdot(ziy)$ *Def i-Form2 mit* (6) $(\underline{y\cdot(1-x)=0})\cdot\exists v{:}((v=v\cdot z)\cdot(\underline{v\cdot z=v\cdot y}))$ *kongruent intern, mit* (6) $(v\cdot y\cdot(1-x)=v\cdot 0)\cdot(v=v\cdot z)\cdot(v\cdot z=v\cdot y)$ *Ring Tausch* $(v=v\cdot z)\cdot(\underline{v\cdot z\cdot(1-x)=0})$ *i-Form 2* $\underline{zix}$ *s* xis.
Fresison (versehentlich ausgeschlossen), *Feriso*, *Festino*, *Ferio*: $(xey)\cdot(yiz)$ *s* $(yex)\cdot(yiz)$ *s* $(xey)\cdot(ziy)$ *s* $(yex)\cdot(ziy)$ *Def i-Form1 mit* (6) $(y\cdot x=0)\cdot\exists v{:}((v=v\cdot z)\cdot(v\cdot z=v\cdot y))$ *kongruent intern, mit* (6) $(v\cdot y\cdot x=v\cdot 0)\cdot(v=v\cdot z)\cdot(v\cdot z=v\cdot y)$ *Ring Tausch* $(v=v\cdot z)\cdot(v\cdot z\cdot x=0)$ *o-Form* zox.
<u>*Baroco*</u>: $(\underline{xay})\cdot(\underline{zoy})$ *a-Synonym o-Form2 mit* (6) $(\underline{x=x\cdot y})\cdot\exists v{:}((v=v\cdot z)\cdot(\underline{v\cdot z=v\cdot(1-y)}))$ *kongruent intern mit* (6) $(v=v\cdot z)\cdot(v\cdot z\cdot x=x\cdot v\cdot(1-y)\cdot x\cdot y)$ *Ring* $(v=v\cdot z)\cdot(\underline{v\cdot z\cdot x=0})$ *o-Form1* $\underline{zox}$.
Bocardo: $(yox)\cdot(yaz)$ *o-Form a-Synonym-intern* $(y=y\cdot z)\cdot(v=v\cdot y)\cdot(v\cdot y\cdot x=0)$ *Tausch* $(y=y\cdot z)\cdot(v=v\cdot y)\cdot(v\cdot y\cdot z\cdot x=0)$ *kongruent* $(v\cdot y=v\cdot y\cdot z)\cdot(v=v\cdot y)\cdot(v\cdot y\cdot z\cdot x=0)$ *3xTausch >* $(v=v\cdot z)\cdot(v\cdot z\cdot x=0)$ *o-Form* zox.
3eoo, *1oeo*, <u>*1*eoo*</u>: $(yox)\cdot(yez)$ *s* $(\underline{yox})\cdot(\underline{zey})$ *o-Form mit* (6) $\exists v{:}((v=v\cdot y)\cdot(\underline{v\cdot y=v\cdot(1-x)}))\cdot(\underline{z\cdot y=0})$ *Tausch kongruent* $\exists v{:}((v=v\cdot(1-x))\cdot(v\cdot y\cdot z=v\cdot(1-x)\cdot z))\cdot(v\cdot z\cdot y=v\cdot 0)$ *Ring Tausch>* $(v=v\cdot(1-x))\cdot(\underline{0=v\cdot(1-x)\cdot z})$ *symmetrisch, o-Form* $(1-x)oz$ *Def* $\underline{\neg xoz}$ *Objektnegation* $\neg xi\neg z$ *s* $\neg zi\neg x$ *Objektnegation* $\neg zox$.

Syllogismen mit universellen Termen:[18] (12)

Figur 1:	$(YaX)\cdot(ZaY)\Rightarrow ZaX$	*Barbara*	~	$(XaY)\cdot(YaZ)\Rightarrow XaZ$	*4*aaa transitiv*	
	$(YeX)\cdot(ZaY)\Rightarrow ZeX$	*Celarent*	~	$(XaY)\cdot(YeZ)\Rightarrow XeZ$	*4*aee*	
Figur 2:	$(XaY)\cdot(ZeY)\Rightarrow ZeX$	*Camestres*	~	$(XeY)\cdot(ZaY)\Rightarrow XeZ$	*2*eae*	
	$(XeY)\cdot(ZaY)\Rightarrow ZeX$	*Cesare*	~	$(XaY)\cdot(ZeY)\Rightarrow XeZ$	*2*aee*	
Figur 4:	$(XaY)\cdot(YeZ)\Rightarrow ZeX$	*Calemes*	~	$(YeX)\cdot(ZaY)\Rightarrow XeZ$	*1*eae*	

Syllogismen mit universellen Prämissen, partikulärer Konklusion:[18] (13)

Figur 1:	$(yex)\cdot(zey)\Rightarrow\neg zox$	*1eeo*	~	$(xey)\cdot(yez)\Rightarrow\neg xoz$	*4*eeo*	*neu*
Figur 2:	$(xey\cdot(zey)\Rightarrow\neg zox$	*2eeo*	~	$(xey\cdot(zey)\Rightarrow\neg xoz$	*2*eeo*	*neu*
Figur 3:	$(yax)\cdot(yaz)\Rightarrow zix$	*Darapti*	~	$(yax)\cdot(yaz)\Rightarrow xiz$	*3*aai*	
	$(yex)\cdot(yaz)\Rightarrow zox$	*Felapton*	~	$(yex)\cdot(yaz)\Rightarrow xoz$	*3*aeo*	
	$(yex)\cdot(yez)\Rightarrow\neg zox$	*3eeo*	~	$(yex)\cdot(yez)\Rightarrow\neg xoz$	*3*eeo*	*neu*
Figur 4:	$(xey)\cdot(yaz)\Rightarrow zox$	*Fesapo*	~	$(yax)\cdot(zey)\Rightarrow xoz$	*1*aeo*	
	$(xey)\cdot(yez)\Rightarrow\neg zox$	*4eeo*	~	$(yex)\cdot(zey)\Rightarrow\neg xoz$	*1*eeo*	*neu*

Syllogismen mit einer partikulären Prämisse:[18] (14)

Figur 1:	$(yax)\cdot(ziy)\Rightarrow zix$	*Darii*	~	$(xiy)\cdot(yaz)\Rightarrow xiz$	*4*iai*	
	$(yex)\cdot(ziy)\Rightarrow zox$	*Ferio*	~	$(xiy)\cdot(yez)\Rightarrow xoz$	*4*ieo*	
	$(yox)\cdot(zey)\Rightarrow\neg zox$	*1oeo*	~	$(xey)\cdot(yoz)\Rightarrow\neg xoz$	*4*eoo*	*neu*
Figur 2:	$(xey)\cdot(ziy)\Rightarrow zox$	*Festino*	~	$(xiy)\cdot(zey)\Rightarrow xoz$	*2*ieo*	
	$(xay)\cdot(zoy)\Rightarrow zox$	*Baroco*	~	$(xoy)\cdot(zay)\Rightarrow xoz$	*2*oao*	
Figur 3:	$(yix)\cdot(yaz)\Rightarrow zix$	*Disamis*	~	$(yax)\cdot(yiz)\Rightarrow xiz$	*3*aii*	
	$(yax)\cdot(yiz)\Rightarrow zix$	*Datisi*	~	$(yix)\cdot(yaz)\Rightarrow xiz$	*3*iai*	
	$(yox)\cdot(yaz)\Rightarrow zox$	*Bocardo*	~	$(yax)\cdot(yoz)\Rightarrow xoz$	*3*aoo*	
	$(yex)\cdot(yiz)\Rightarrow zox$	*Feriso*	~	$(yix)\cdot(yez)\Rightarrow xoz$	*3*ieo*	
	$(yex)\cdot(yoz)\Rightarrow\neg zox$	*3eoo*	~	$(yox)\cdot(yez)\Rightarrow\neg xoz$	*3*oeo*	*neu*
Figur 4:	$(xiy)\cdot(yaz)\Rightarrow zix$	*Dimatis*	~	$(yax)\cdot(ziy)\Rightarrow xiz$	*1*aii*	
	$(xey)\cdot(yiz)\Rightarrow zox$	*Fresison*	~	$(yix)\cdot(zey)\Rightarrow xoz$	*1*ieo*	
	$(xey)\cdot(yoz)\Rightarrow\neg zox$	*4eoo*	~	$(yox)\cdot(zey)\Rightarrow\neg xoz$	*1*oeo*	*neu*

Aristoteles nannte in seiner Syllogistik nur 14 Syllogismen der *Figuren 1-3*. Er bewies aber auch Syllogismen zu *1*-3**.[19] Petrus Hispanus nahm fünf der *Figur 1** in seinen Merkvers mit 19 Syllogismen auf; sie wurden später zur *Figur 4* umgeformt, die Whately übernahm.[20] Booles 50 Syllogismen umfassen und erweitern beide Traditionen; aus dem Syllogismus *4*aaa* leitete er per *p* auch den oben ungenannten Syllogismus *Bamalip/Bramantip* ab.[21] Boole plädierte für negierte Terme,[22] die auch Aristoteles nutzte,[23] verwendete sie aber nur in

19 [*An.pr.* A7,29a22-27] konvertierte Konklusion per *s* und *p*.

20 [Petrus Hispanus *Tractatus* IV13] Ur-Merkvers; dort *Figur 1** mit *Baralipton*, *Celantes*, *Dabitis*, *Fapesmo*, *Frisesomorum*. Boole/Whately-*Figur 4*.↑17 Oben die Haupttradition mit *Figur 4*: *Bamalip*, *Calemes*, *Dimatis*, *Fesapo*, *Fresison*.

21 [Boole 39]

22 [Boole 28]

23 [*An.pr.* A46:51b36-52a7] Regeln für negierte Terme.

Konklusionen, weshalb seine neuen Negativ-Figuren sehr unvollständig sind. Negativ-Syllogismen sind aber überflüssig, denn sogar die angeblich „nicht nach aristotelischen Regeln bestimmbaren“[↑18] Syllogismen *1eeo, 2eeo, 3eeo, 4eeo, 1oeo, 3eoo* sind simple Anwendungen von *Felapton* und *Bocardo*.[24] Seine viel umständlichere Beweistechnik bringt nichts Neues; wirksam sind nur seine neuen Definitionen der universellen Aussagen.

Aristoteles arbeitete nur mit freien Variablen und nur mit allgemeingültigen Syllogismen. Diese Allgemeinheit verfehlte Boole. Er brauchte ergänzend zur Algebra unbedingt gebundene Variablen zur Simulation negierter Gleichungen; denn Gleichungen sind bei ihm keine Terme, sondern dienen nur als Beweisregeln. Er arbeitete also auf einer metasprachlichen Regelebene. Verbale kategorische Aussagen dagegen gebrauchte er nur kommentierend. Statt der bis dahin üblichen Singularaussagen Omne *A* est *B*, Nullum *A* est *B*, Quoddam *A* est *B* und Quoddam *A* non est *B*, die Whately nur englisch übersetzte, verwendete er Pluralaussagen: All Xs are Ys, No Xs are Ys, Some Xs are Ys, Some Xs are not Ys. Er dachte nämlich bei den Xs und Ys an die Klassenelemente, weshalb er zugehörige Klassen stets durch kleingeschriebene Auswahlsymbole *x* und *y* erfasste. Diese intuitive Sprachebene mit Elementen kommt in Formeln gar nicht vor. Im späteren Buch *The Laws of Thought* hob er diese Trennung auf und identifizierte *x* und *y* mit *x*‘s und *y*‘s,[25] was der klassenlogischen Präzisierung entspricht. Auf gebundene Variablen verzichtete er aber dort nicht.

Die Bindung an die Schulalgebra engte seine logische Sprache ein. Sie zwang ihn zum Verzicht auf Gleichungsterme. Diese gehörten zur mathematischen Sprache seit der Antike und waren durch Euklids *Elemente* Allgemeingut. Aristoteles behandelte sie in seiner Logik in der *Topik* VII. Dieser Tradition folgte Leibniz, der bereits 1686 in den *Generales inquisitiones* eine algebraische Logik mit idempotenter Multiplikation und der Negation mit aristotelischen Regeln verwendete; hier gelten die booleschen Rechenregeln und sind klassisch mit dem Satz vom *Widerspruch* und *indirekten Beweisen* beweisbar [*A* 65][*U* 19ff]. Es ist eine Gleichheitslogik, die er auch zur Optimierung der Syllogistik nutzte. Schon er definierte die <u>universellen</u> Aussagen genau wie Boole, aber die <u>partikulären</u> traditionell kontradiktorisch per Negation. 160 Jahre vor ihm hatte er schon eine elegantere mathematische Syllogistik, aber unpubliziert, denn die *Generales inquisitiones* wurden erst 1903 ediert. Boole konnte an dieser geheimen Syllogistik natürlich nicht anknüpfen und erfand die algebraische Syllogistik ein zweites Mal unabhängig von Leibniz. Dieser

---

24 *Objektnegation 2 (klassisch)*: $X\mathrm{e}Y \;_{Def}\; X{\cdot}Y=0 \;_{Doppelnegation}\; X{\cdot}\neg\neg Y=0 \;_{Def}\; X\mathrm{a}\neg Y$.
1eeo, 2eeo, 3eeo, 4eeo, 1oeo, 3eoo (aristotelisch): $(Y\mathrm{e}X){\cdot}(Z\mathrm{e}Y) \;_{s}\; (X\mathrm{e}Y){\cdot}(Z\mathrm{e}Y) \;_{s}\; (X\mathrm{e}Y){\cdot}(Y\mathrm{e}Z) \;_{s}\; (Y\mathrm{e}X){\cdot}(Y\mathrm{e}Z) \;_{Objektnegation\ 2}\; (Y\mathrm{e}X){\cdot}(Y\mathrm{a}\neg Z) \;_{Felapton}\; \neg Z\mathrm{o}X$; und $(Y\mathrm{o}X){\cdot}(Z\mathrm{e}Y) \;_{s}\; (Y\mathrm{o}X){\cdot}(Y\mathrm{e}Z) \;_{Objektnegation\ 2}\; (Y\mathrm{o}X){\cdot}(Y\mathrm{a}\neg Z) \;_{Bocardo}\; \neg Z\mathrm{o}X$.

25 [Boole: *The Laws of Thought* 56, 63]

jedoch definierte einfacher und allgemeiner als Boole, und zwar drückte er ≠0 durch est res und non est res durch =0 aus:

Definitionen:[26] (15)

Quoddam *A* est *B*, dat: *AB* est res.	IRGENDEIN *A* IST EIN *B* ≔ *A*i*B* ≔ *A*·*B*≠0
Quoddam *A* non est *B* dat: *A* non-*B* est res.	IRGENDEIN *A* IST KEIN *B* ≔ *A*o*B* ≔ *A*·¬*B*≠0
Omne *A* est *B* dat: *A* non-*B* non est res.	JEDES *A* IST EIN *B* ≔ *A*ɑ*B* ≔ *A*·¬*B*=0
Nullum *A* est *B* dat: *AB* non est res.	KEIN *A* IST EIN *B* ≔ *A*e*B* ≔ *A*·*B*=0

Bei Leibniz verschwindet der Ballast aus Booles Syllogistik. Man kann dessen Synonyme allgemeiner für beliebige Klassen beweisen.

Theoreme:[27] (16)

*A*ɑ*B*=¬*B*ɑ¬*A*	*A*o*B*=¬*B*o¬*A*	*Kontraposition*
*A*i*B*=*B*i*A*	*A*e*B*=*B*e*A*	*conversio* ***s****implex s*
*A*o*B*=¬(*A*ɑ*B*)	*A*i*B*=¬(*B*e*A*)	*kontradiktorisch*
*A*e*B*=¬(*B*i*A*)	*A*ɑ*B*=¬(*A*o*B*)	
*A*ɑ*B*=*A*e¬*B*	*A*e*B*=*A*ɑ¬*B*	*Objektnegation*
*A*o*B*=*A*i¬*B*	*A*i*B*=*A*o¬*B*	

Leibniz nutzte die einfache Beweistechnik von Aristoteles, etwa mit indirekten Umkehrungen, bei denen die negierte Konklusion als dritte indirekte Prämisse mit permutiert wird.[28] Mit ihnen bewies Aristoteles schon eine Isomorphie seiner drei Figuren (sie erzeugt nebenbei die *Change of order*):

Theoreme mit *u*, *v*, *w* für ɑ, e, i, o und ɑ̸=o, e̸=i, i̸=e, o̸=ɑ:[29] (17)

a·*b*⇒*c*	╫ *a*·¬*c*⇒¬*b*	╫ ¬*c*·*b*⇒¬*a*	*indirekte Umkehrung*
Barbara	╫ *Baroco*	╫ *Bocardo*	*per opposito* ***c****onclusionis c*
Celarent	╫ *Festino*	╫ *Disamis*	*mit*
Darii	╫ *Camestres*	╫ *Ferison*	*Aristoteles-Beispielen*
Ferio	╫ *Cesare*	╫ *Datisi*	

1uvw ╫ *2uw̸v̸* ╫ *3w̸vu̸* ╫ *4*vuw* ╫ *2*w̸uv̸* ╫ *3*vw̸u̸*

---

[26] [Leibniz *GI* §151]

[27] *conversio simplex*: *A*i*B* $_{Def}$ *A*·*B*≠0 $_{m}$ *B*·*A*≠0 $_{Def}$ *B*i*A*; und: *A*e*B* $_{Def}$ *A*·*B*=0 $_{m}$ *B*·*A*=0 $_{Def}$ *B*e*A*.
kontradiktorisch: *A*i*B* $_{Def}$ *A*·*B*≠0 $_{Def}$ ¬(*A*e*B*); und: *A*e*B* $_{Doppelnegation\ Def}$ ¬(*A*·*B*≠0) $_{Def}$ ¬(*A*i*B*); und: *A*o*B* $_{Def}$ *A*·¬*B*≠0 $_{Def}$ ¬(*A*ɑ*B*); und: *A*ɑ*B* $_{Doppelnegation\ Def}$ ¬(*A*·¬*B*≠0) $_{Def}$ ¬(*A*o*B*).
Kontraposition: *A*ɑ*B* $_{Def}$ *A*·¬*B*=0 $_{Doppelnegation\ m}$ ¬*B*·¬¬*A*=0 $_{Def}$ ¬*B*ɑ¬*A*; und: *A*o*B* $_{Def}$ *A*·¬*B*≠0 $_{Doppelnegation\ m}$ ¬*B*·¬¬*A*≠0 $_{Def}$ ¬*B*o¬*A*.
Objektnegation: *A*ɑ*B* $_{Def}$ *A*·¬*B*=0 $_{Def}$ *A*e¬*B*; und: *A*e*B* $_{Def}$ *A*·*B*=0 $_{Doppelnegation}$ *A*·¬¬*B*=0 $_{Def}$ *A*ɑ¬*B*; und: *A*o*B* $_{Def}$ *A*·¬*B*≠0 $_{Def}$ *A*i¬*B*; und: *A*i*B* $_{Def}$ *A*·*B*≠0 $_{Doppelnegation}$ *A*·¬¬*B*≠0 $_{Def}$ *A*o¬*B*.

[28] [Leibniz: *De formis syllogismorum Mathematice definendes* 499ff]

[29] [*An.pr.* B8,59b3-5] *indirekte Umkehrung*: *a*·*b*⇒*c* $_{indirekt}$ *a*·*b*·¬*c*⇒0 $_{m}$ ¬*c*·*b*·*a*·⇒0, *a*·¬*c*·*b*⇒0 $_{indirekt}$ *a*·¬*c*⇒¬*b*, ¬*c*·*b*⇒¬*a*. Obige Beispiele in B8, B9, B10, schematisch: $_{1uvw\ Umkehrung1+2}$ (*YuX*)·(*ZvY*)⇒*ZwX*, (*YuX*)·(*Zw̸X*)⇒*Zv̸Y*, (*Zw̸X*)·(*ZvY*)⇒*Yu̸X* $_{m}$ (*ZvY*)·(*YuX*)⇒*ZwX*, (*Zw̸X*)·(*YuX*)⇒*Zv̸Y*, (*ZvY*)·(*Zw̸X*)⇒*Yu̸X*.
[Petrus Hispanus *Tractatus* IV 9] *reducere ad impossibile per opposito* ***c****onclusionis* ist der Name, der offenbar in IV 14 den Code *c* motiviert.

Nichtisomorph zur ersten Figur ist die aristotelische Nebenfigur *1** und ebenso die jüngere Figur *4*, die Leibniz beide selbstverständlich auch bekannt waren.[30] Hier erzeugen indirekte Umkehrungen Dreierzyklen innerhalb beider Figuren.

Theoreme mit u, v, w für a, e, i, o (trivial): (18)

$1^*uvw \dashv\vdash 1^*v\not{w}\not{u} \dashv\vdash 1^*\not{w}u\not{v} \dashv\vdash 4vuw \dashv\vdash 4u\not{w}\not{v} \dashv\vdash 4\not{w}v\not{u}$ *Dreierzyklen*

Mit den Definitionen von Leibniz sind *Barbara* und *Celarent* beweisbar. Die starken Syllogismen folgen exakt nach den einfachen Beweisen von Aristoteles. Dessen Axiome codierte Petrus Hispanus als Konsonanten *B C D F c s m* der Merknamen, ohne Beweise von *D F*, mit denen Aristoteles sein Axiomensystem erst nachträglich reduzierte (anfangs sind *D F* Axiome):↑20

Figur 1:[31]			Beweise: (19)
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\Rightarrow Z\mathrm{a}X$	***B**arbara*	*B*	$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\ _{\textit{Def-normiert}}\ (Y=Y\cdot X)\cdot(Z=Z\cdot Y)\ _{\textit{kongruent}}$ $(Z\cdot Y=Z\cdot Y\cdot X)\cdot(Z=Z\cdot Y)\ _{\textit{Tausch}}\ Z=Z\cdot X\ _{\textit{Def-normiert}}\ Z\mathrm{a}X$
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\Rightarrow Z\mathrm{e}X$	***C**elarent*	*C*	$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\ _{\textit{Def}}\ (Y\mathrm{a}\neg X)\mathrm{a}Y)\ _{\textit{Barbara}}\ Z\mathrm{a}\neg X\ _{\textit{Def}}\ Z$
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\Rightarrow Z\mathrm{i}X$	***D**arii*	*D*	*Aristoteles: c indirekte Umkehrung von Camestres (Figur 2)*
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	***F**erio*	*F*	*Aristoteles: c indirekte Umkehrung von Cesare (Figur 2)*
Figur 2:[32]			Beweise nach dem Code (fett):
$(X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\Rightarrow Z\mathrm{e}X$	***C**e**s**are*		$(X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\ _{\boldsymbol{s}}\ (Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\ _{\textit{\textbf{C}elarent}}\ Z\mathrm{e}X$
$(X\mathrm{a}Y)\cdot(Z\mathrm{e}Y)\Rightarrow Z\mathrm{e}X$	***C**a**m**e**s**tres*		$(X\mathrm{a}Y)\cdot(Z\mathrm{e}Y)\ _{\boldsymbol{m\,s}}\ (Y\mathrm{e}Z)\cdot(X\mathrm{a}Y)\ _{\textit{\textbf{C}elarent}}\ Z\mathrm{e}X$
$(X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	***F**e**s**tino*		$(X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\ _{\boldsymbol{s}}\ (Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\ _{\textit{\textbf{F}erio}}\ Z\mathrm{o}X$
$(X\mathrm{a}Y)\cdot(Z\mathrm{o}Y)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	***B**aro**c**o*		*c indirekte Umkehrung von **B**arbara*
Figur 3:[33]			
$(Y\mathrm{i}X)\cdot(Y\mathrm{a}Z)\Rightarrow Z\mathrm{i}X$	***D**i**s**a**m**i**s***		$(Y\mathrm{i}X)\cdot(Y\mathrm{a}Z)\ _{\boldsymbol{s}}\ (X\mathrm{i}Y)\cdot(Y\mathrm{a}Z)\ _{\boldsymbol{m}}\ (Y\mathrm{a}Z)\cdot(X\mathrm{i}Y)\ _{\textit{\textbf{D}arii}}\ X\mathrm{i}Z\ _{\boldsymbol{s}}\ Z\mathrm{i}X$
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Y\mathrm{i}Z)\Rightarrow Z\mathrm{i}X$	***D**ati**s**i*		$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Y\mathrm{i}Z)\ _{\boldsymbol{s}}\ (Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\ _{\textit{\textbf{D}arii}}\ Z\mathrm{e}X$
$(Y\mathrm{o}X)\cdot(Y\mathrm{a}Z)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	***B**o**c**ardo*		*c indirekte Umkehrung von **B**arbara*
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Y\mathrm{i}Z)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	***F**eri**s**o*		$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Y\mathrm{i}Z)\ _{\boldsymbol{s}}\ (Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\ _{\textit{\textbf{F}erio}}\ Z\mathrm{o}X$
Figur 1 (Dreierzyklus):*[34]			
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\Rightarrow X\mathrm{e}Z$	***C**elante**s***		$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\ _{\textit{\textbf{C}elarent}}\ Z\mathrm{e}X\ _{\boldsymbol{s}}\ X\mathrm{e}Z$
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\Rightarrow X\mathrm{i}Z$	***D**abiti**s***		$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\mathrm{i}Y)\ _{\textit{\textbf{D}arii}}\ Z\mathrm{i}X\ _{\boldsymbol{s}}\ X\mathrm{i}Z$
$(Y\mathrm{i}X)\cdot(Z\mathrm{e}Y)\Rightarrow X\mathrm{o}Z$	***F**ri**s**e**s**o**m**(orum)*		$(Y\mathrm{i}X)\cdot(Z\mathrm{e}Y)\ _{\boldsymbol{s\,s}}\ (X\mathrm{i}Y)\cdot(Y\mathrm{e}Z)\ _{\boldsymbol{m}}\ (Y\mathrm{e}Z)\cdot(X\mathrm{i}Y)\ _{\textit{\textbf{F}erio}}\ X\mathrm{o}Z$

Diese Syllogismen sind mit leeren oder nichtleeren Begriffen belegbar und bilden die unproblematische allgemeine Syllogistik, die Boole nicht ganz erreichte. In ihr wird keine *conversio **p**er accidens* mit Code *p* angewandt, denn

---

[30] [Leibniz 1053] *Figur 1**, *Figur 4*: *Digami*, *Balani*, *Fedilom*, *Fegano*, *Cadere* nach [Flacius: *Opus logicam*... (1593), S. 464].

[31] [*An.pr.* A4:25b37ff, 25b40ff, 26a23ff, 26a25ff] Axiome *B C D F*.
[*An.pr.* A7:29b8-14] nachgereichte Beweise für *D* und *F*.

[32] [*An.pr.* A5:27a5ff, 27a9ff, 27a32ff, 27a37ff]

[33] [*An.pr.* A6:28b7ff, 28b12ff, 28b17ff, 28b33ff]

[34] [*An.pr.* A7:29a22-27] *Figur 1**-Schema.

diese Regel macht Probleme bei leeren Begriffen: Gilt *p*, so ist das Subjekt der Aussage ALLE *A* SIND *B* nicht leer, und deswegen kann das Subjekt im Gegenteil EINIGE *A* SIND NICHT *B* leer sein, was sprachlich unsinnig ist. Da intuitiv das Subjekt in ALLE *A* SIND *B* nicht leer sein muss, ist die Definition von Leibniz adäquater und hat zugleich auch ein sprachlich adäquates Gegenteil. Natürlich gelten dann *subalterne* Relationen im logischen Quadrat nicht mehr allgemein. Die Lösung von Leibniz schränkt aber dieses traditionelle Denkmuster weniger stark ein als Booles Klassenexistenzaxiom (8). Leibniz nahm für nichtleere Terme $A\,\mathrm{i}\,A$ an und bewies per *Darii* die *subalterne* Relation.[37] Eine Variante mit diesem Faktor erzeugt den subalternen Bereich der Syllogistik und wird am einfachsten mit Akzent codiert.

Definitionen: (20)

$A\acute{a}B \coloneqq (A\mathrm{a}B)\cdot(A\,\mathrm{i}\,A)$	*Vokalcode á*
$A\acute{o}B \coloneqq \neg(A\acute{a}B)$	*Vokalcode ó*

Theoreme:[35] (21)

$A\acute{a}B \Rightarrow B\,\mathrm{i}\,A$	*conversio per accidens p*
$A\acute{a}B \Rightarrow A\,\mathrm{i}\,B$	*subaltern*

Aristoteles schwächte Syllogismen ab durch eine stärkere Prämisse, denn im stärkeren Syllogismus wirkt schon die schwache Prämisse.[36] Diese Beweise a fortiori gebrauchte auch Leibniz.[37]

Figur 1:[36]		Beweis: (22)
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\acute{a}Y)\Rightarrow Z\,\mathrm{i}\,X$	*Barbári*	$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\acute{a}Y)\ _{\mathit{subaltern}}\ (Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\,\mathrm{i}\,Y)\ _{\mathit{Darii}}\ Z\,\mathrm{i}\,X$
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\acute{a}Y)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	*Celáront*	$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\acute{a}Y)\ _{\mathit{subaltern}}\ (Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\,\mathrm{i}\,Y)\ _{\mathit{Ferio}}\ Z\mathrm{o}X$
Figur 2:[36]		
$(X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\acute{a}Y)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	*Cesáro*	$(X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\acute{a}Y)\ _{\mathit{subaltern}}\ (X\mathrm{e}Y)\cdot(Z\,\mathrm{i}\,Y)\ _{\mathit{Festino}}\ Z\mathrm{o}X$
$(X\mathrm{a}Y)\cdot(Z\mathrm{e}Y)\Rightarrow Z\acute{o}X$	*Camestrós*	*c indirekte Umkehrung von Barbári*
Figur 3:[36]		
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Y\acute{a}Z)\Rightarrow Z\,\mathrm{i}\,X$	***D**ará**p**ti*	$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Y\acute{a}Z)\ _{\boldsymbol{p}}\ (Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\,\mathrm{i}\,Y)\ _{\mathit{Darii}}\ Z\,\mathrm{i}\,X$
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Y\acute{a}Z)\Rightarrow Z\mathrm{o}X$	***F**elá**p**ton*	$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Y\acute{a}Z)\ _{\boldsymbol{p}}\ (Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\,\mathrm{i}\,Y)\ _{\mathit{Ferio}}\ Z\mathrm{o}X$
Figur 1 (Dreierzyklus):*[36]		
$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\acute{a}Y)\Rightarrow X\,\mathrm{i}\,Z$	*Barálip(ton)*	$(Y\mathrm{a}X)\cdot(Z\acute{a}Y)\ _{\mathit{Barbari}}\ Z\,\mathrm{i}\,Y\ _{\boldsymbol{s}}\ X\,\mathrm{i}\,Z$
$(Y\acute{a}X)\cdot(Z\mathrm{e}Y)\Rightarrow X\mathrm{o}Z$	*Fápesmo*	*c indirekte Umkehrung von Barálip*
$(Y\mathrm{e}X)\cdot(Z\mathrm{a}Y)\Rightarrow X\acute{o}Z$	*Celantós*	*c indirekte Umkehrung von Barálip*

---

35 [Leibniz: *De formis syllogismorum Mathematice definendes* 499] *conversio per accidens p, subaltern*: $A\acute{a}B\ _{\mathit{Def}}\ (A\mathrm{a}B)\cdot(A\,\mathrm{i}\,A)\ _{\mathit{Darii}}\ A\,\mathrm{i}\,B\ _{s}\ B\,\mathrm{i}\,A$.

36 [*An.pr.* A4,26b15f] eine unbestimmte Prämisse kann a oder i bedeuten; [*An.pr.* A4,26a28ff] gestattet i-Prämissen durch unbestimmte zu ersetzen. *Subaltern* erzeugt so *Barbari*, *Celaront*, *Cesaro* und mit *s* auch *Baralipton* nach [*An.pr.*A7:29a22-27]; *p* erzeugt auf diese Weise ***D**ara**p**ti* und ***F**ela**p**ton* laut [*An.pr.* A6:28a17ff, 28a26ff].

37 [Leibniz: *De modis syllogisticis primariis atque secundariis* 494]

Im Merkvers von Petrus Hispanus – und analog in der Whately-Variante, von der Boole ausging – stehen nur die schwachen Syllogismen *Darapti*, *Felapton* *Baralipton* und *Fapesmo*. Er codierte nur bei ***D**ara**p**ti* und ***F**ela**p**ton* den Originalbeweis von Aristoteles. Nur diese gehören zu den expliziten Syllogismen bei Aristoteles, weil er die Prämissenpaare untersuchte und hier die stärksten Konklusionen angab. Das ist nämlich der Unterschied zu den anderen Syllogismen, die Varianten zu Syllogismen mit denselben Prämissenpaaren sind. Deswegen fehlen auch bei Aristoteles explizite Beweise für die übrigen abgeschwächten Syllogismen, die er alle nur pauschal nebenbei über ein Beweisschema erwähnte. Man sieht an dieser Stelle deutlich die parallele Vorgehensweise von Aristoteles und Boole.

Bei der Ergänzung der Figur *1** codierte Petrus Hispanus bei ***B**arali**p**ton* und ***F**a**p**e**sm**o* einen eigenen Beweis, den man leicht mit den Codes ausführen kann statt der indirekten Umkehrung. Die Namen der Syllogismen *Barbari*, *Celaront*, *Cesaro*, *Camestros* und *Celantos* wurden erst im 16. Jahrhundert ergänzt.[38] Sie gehen an der Intention der des Codes vorbei, der ja nicht nur den Syllogismus benennt, sondern auch den Beweis codiert, was die Renaissance-Autoren versäumten. Ihre Namen signalisieren also nur eine modifizierte Konklusion. Abschwächungen von *Camestres* und *Celantes* gab Aristoteles nicht an, da ihre universellen Prämissen nicht abschwächbar sind. Sie folgen per indirekter Umkehrung nach (18), aber – und das ist bezeichnend – als Dreierzyklus mit zusätzlichen Akzenten: *Barálip*⊣⊢*Fápesmo*⊣⊢*Celantós*. Ebenso folgen mit (17) nur akzentuierte indirekte Umkehrungen *Barbári*⊣⊢*Camestrós*⊣⊢*Felápto*. Das ist deswegen bezeichnend, weil die Konklusion bei *Celantós* und *Camestrós* die verbal inadäquate partikulär negative Aussage ist, die $X=0$ nicht ausschließt und noch nicht der Definition von Leibniz genügt. Es gibt also einen logischen Grund für das Fehlen dieser Neben-Syllogismen bei Aristoteles. Für eine echte Konklusion $X\mathrm{o}Z$ wäre hier eine Zusatzprämisse $X\mathrm{i}X$ nötig; ein nichtleeres Subjekt bei e genügt nicht, wie man sich an *Celantós* sofort klarmacht.

Die Syllogistik von Leibniz funktioniert in jeder modernen booleschen Algebra. Daher ist sie sachlich gesehen eine boolesche Syllogistik, auch wenn sie älter ist. Sie optimiert jedenfalls Booles Syllogistik deutlich. Leibniz hatte natürlich mit der Entwicklung dieser Syllogistik lange gerungen: Er machte viele Versuche und verwarf wieder viele. Davon geben seine zahlreiche Logikskizzen ein beredtes Zeugnis, auch die *Generales inquisiones*, aus denen hier nur die Definitionen §151 zitiert wurden. Sie verbreiteten sich in der modernen Logik über Peano, der im *Calcolo geometrico* 1888 die boolesche Algebra in die heutige Form brachte und den Leibniz-Definitionen entsprechende Formeln angab.[39]

---

38 [Alexander Achillini: *De potestate syllogismis*, ediert 1545, S. 155] ist wohl hier die Urquelle.

39 [Peano: *Calcolo geometrico* 14]. Zum Leibniz-Bezug bei ihm [*A* 74].

Literatur

Alexander Achillini: *De potestate syllogismis*, Edition posthum 1545.

Aristoteles: *Organon*, ed. H. G. Zekl, gr.-dt., 3 Bände, Hamburg 1998.

Aristoteles: *Topik*, in [Aristoteles: *Organon* I].

[*An.pr.*] Aristoteles: *Analytica priora*, in [Aristoteles: *Organon* III, 2-307].

[Boole] Boole, George: *The Mathematical Analysis of Logi*c, Cambridge 1847.
dt.: *Die mathematische Analyse der Logik*, aus dem Englischen übertragen, kommentiert und mit einem Nachwort versehen von Tilman Bergt: Halle/Saale, 2001.

Boole, George: *The Laws of Thought*, Cambridge 1854.

Flacius, Matthias: *Opus logicam in Organon Aristotelis Stagiritae*, 1593.

[Leibniz] Leibniz, Gottfried Wilhelm: *Sämtliche Schriften und Briefe*, Reihe VI, *Philosophische Schriften*, Band 4, Teil A, Berlin, 1999.

[*GI*] Leibniz, G. W.: *Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatem*, 1686, ed. lat./dt. Franz Schupp als: *Allgemeine Untersuchungen über die Analyse der Begriffe und Wahrheiten*, Hamburg ^{1}1982, ^{2}1993.
= [Leibniz 739-788]

Leibniz, G. W.: *De formis syllogismorum Mathematice definendes* in: [Leibniz 497-506].

Leibniz, G. W.: *De modis syllogisticis primariis atque secundariis*: [Leibniz 494].

[*A*] Neumaier, Wilfried: *Aristotelische Logiken, dargestellt als algebraische Kalküle*, Hildesheim, New York 2013.

[*U*] Neumaier, W.: *Universallogik. Eine Synthese klassischer Logiken von Aristoteles, Leibniz, Boole, Frege, Peano, Cantor, Zermelo*, Hildesheim, Zürich, New York 2020.

Neumaier, W.: *Petrus Hispanus*, Artikel in: *Wikipedia*, Dezember 2012, Hauptautor.

Neumaier, W.: *George Boole*, *Originalkalkül*, Subartikel in: *Wikipedia*, Januar 2017, Hauptautor.

Petrus Hispanus: *Tractatus* = *Summulae logicales*, ed. L. M. De Rijk, Assen, 1972.
dt.: *Logische Abhandlungen, Tractatus/Sumulae Logicales*. Aus dem Lateinischen von W. Degen und B. Bapst, München 2006.

Peano, Giuseppe: *Calcolo geometrico*, Turin, 1888.

Schröder, Ernst: *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Leipzig 1877, Nachdruck, Darmstadt 1964.

Whately, Richard: *Elements of Logic*, London 1826.