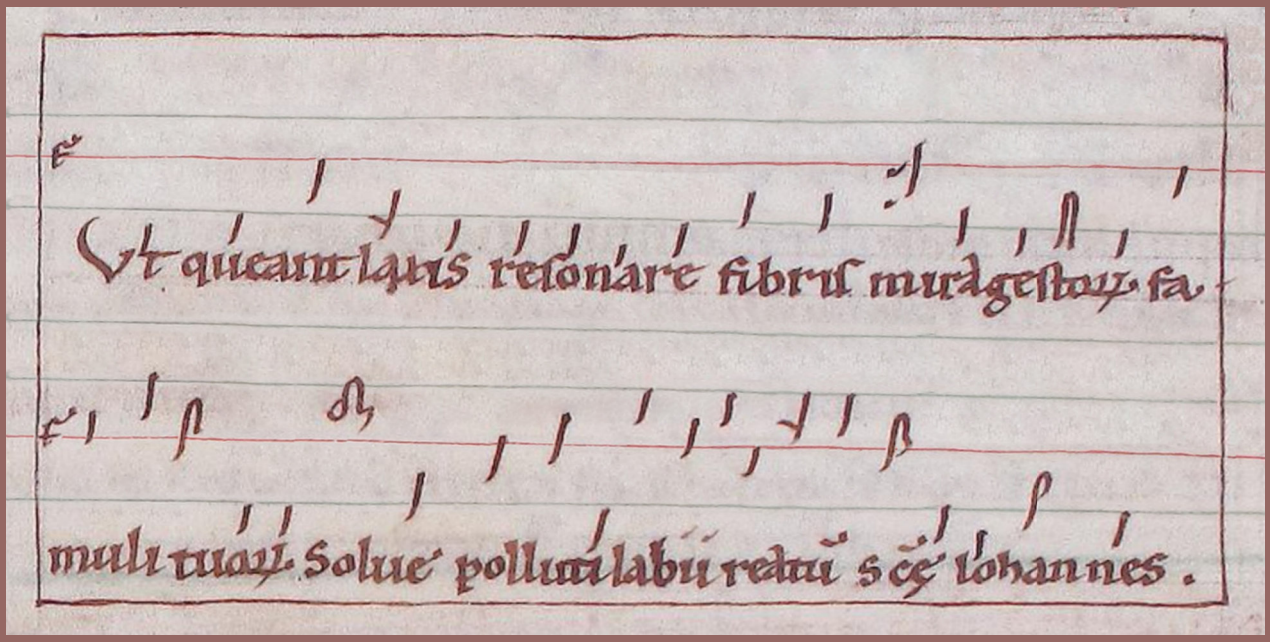
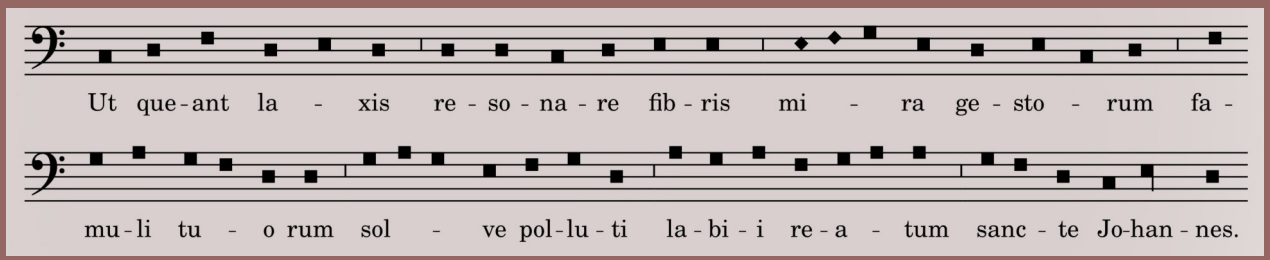
UNSER NOTEN- UND TAKTSYSTEM





Heft 2
Wilfried Neumaier
November 2025

Musik-Mathematik kurz gefasst

Vor tausend Jahren begann die Entwicklung des Notensystems, als Guido von Arezzo um 1025 Notenlinien einführte. Er notierte auf ihnen Melodien in Neumen, etwa seine Melodie zur Einführung der Tonsilben ut, re, mi, fa, sol, la auf dem Titelbild; vorn auf der roten Linie steht der F-Schlüssel, das Urbild des Bassschlüssels; darunter seine Melodie in leichter lesbaren Quadratnoten 𝅜 𝅝 𝅗𝅥, die bald die Neumen ablösten. Guidos Liniensystem setzte sich sofort durch. Es ist im früheren Heft UNSER HARMONISCHES TONSYSTEM [*H*] in aktueller Form als Stufensysem dargestellt. Die Tonhöhendimension ist also wohldefiniert:

(1) Die **Tonhöhe** ist eine Abbildung, die **Tönen** einen **Tonnamen** einer Stufe des Stufensystems zuordnet.[*H*(14)]

In der mehrstimmigen Musik mit Neumen oder Quadratnoten war die Notendauer noch ungeregelt. Um 1180 in der Notre-Dame-Epoche wurde sie geregelt durch rhythmische Muster (Modi), die Johannes de Garlandia um 1240 in seiner Schrift *De mensurabili musica* erklärte. Noten waren aber in verschiedenen Kontexten unterschiedlich lang. Die Drei- oder Zweiteilung der Longa 𝅜, Brevis 𝅝 und Semibrevis 𝅗𝅥 bis zur Minima 𝅗𝅥 wurde um 1320 durch die *Ars nova* von Philipp de Vitry zur Regel. Sie galt auch noch, als im nächsten Jahrhundert weiße Noten 𝅗𝅥, 𝅗𝅥, 𝅝, 𝅗𝅥 mit Unterteilungen 𝅗𝅥 und 𝅗𝅥 üblich wurden. Erst nach 1600 wurden diese Noten als feste Dauerzeichen konsequent durch schrittweise Halbierung definiert. Bei der späteren Stilisierung wurde aus der Semibrevis 𝅝 die ganze Note 𝅝, die heute die Einheit für die Dauer ist:

(2) Die **Dauer** ist eine Abbildung, die Vielfache der ganzen Note 𝅝 zuordnet.
Notenwerte und **Pausenwerte** sind folgendermaßen definiert:

𝅜 := 2𝅝	𝄻 := 𝅝	
𝅗𝅥 := 𝅗𝅥 := $^1/_2$𝅝	𝄼 := $^1/_2$𝄻	punktierte Werte x:
𝅘𝅥 := 𝅘𝅥 := $^1/_4$𝅝	𝄽 := $^1/_4$𝄻	$x\cdot := x+^1/_2 x$ $\quad x\cdot\cdot := x+^1/_2 x+^1/_4 x$
𝅘𝅥𝅮 := 𝅘𝅥𝅮 := $^1/_8$𝅝	𝄾 := $^1/_8$𝄻	gebundene Werte x und z:
𝅘𝅥𝅯 := 𝅘𝅥𝅯 := $^1/_{16}$𝅝	𝄿 := $^1/_{16}$𝄻	$x\frown z := x\frown z := x+z$
𝅘𝅥𝅰 := 𝅘𝅥𝅰 := $^1/_{32}$𝅝	𝅀 := $^1/_{32}$𝄻	

In der Notenschrift werden Notenwerte ins Liniensystem gesetzt und kombiniert mit zugehörigen Tonnamen; bei Pausen ist die Lage auf den Notenlinien belanglos. Es werden also nur die Merkmale der Töne notiert, nämlich ihre Dauer und Tonhöhe oder bei Pausen nur die Dauer. Deshalb formalisiert man Noten am besten durch eine Liste ihrer Merkmale:

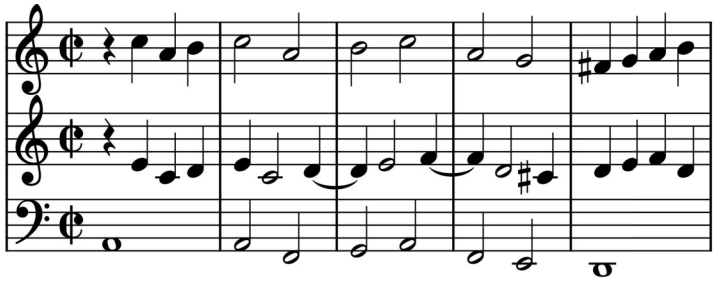
(3) **Noten** werden formalisiert als Liste $x=[x_1,...,x_n]$ mit dem Notenwert x_1.
Für Noten $x=[x_1,x_2]$ mit Tonnamen x_2 gilt Tonhöhe(x) := x_2.
Pausen sind Noten der Form $x=[x_1]$ mit dem Merkmal Dauer(x) := x_1.
$x=[x_1,...,x_n]$ mit definiertem Merkmal $M(x)$ wird als $x_{[z]} := [x_1,...,x_n,z]$ erweitert mit Zusatzmerkmal($x_{[z]}$) := z und vererbtem Merkmal $M(x_{[z]}) := M(x)$.
Speziell gilt dann: Dauer($x_{[z]}$) := Dauer(x) und Tonhöhe($x_{[z]}$) := Tonhöhe(x).

Melodien entstehen durch Aneinanderreihen von Noten; deren Position und Ende lassen sich innerhalb einer Notenfolge bestimmen:

(4) Für **Notenfolgen** $l_1...l_n$ gelten: Notenzahl($l_1...l_n$) ≔ n
Länge($l_1...l_n$) ≔ Dauer(l_1)+...+Dauer(l_n)
Position(l_1) ≔ 0, Position(l_p) ≔ Länge($l_1...l_{p-1}$) = Dauer(l_1)+...+Dauer(l_{p-1})
Ende(l_p) ≔ Position(l_p)+Dauer(l_p) = Dauer(l_1)+...+Dauer(l_p)

In der Notre-Dame-Zeit schrieb man Notenfolgen untereinander, ebenso Noten mit gleicher Position. Diese Partiturnotation wurde im 13. Jahrhundert unüblich, bis sie Samuel Scheidt 1624 in der *Tabulatura nova* wieder einführte:

(5)



Beispiel:
Samuel Scheidt, *Tabulatura nova*:
Vater unser im Himmelreich,
Versus 6

Formalisierung:

[𝄽][𝅘𝅥,c''][𝅘𝅥,a'][𝅘𝅥,h'][𝅘𝅥,c''][𝅘𝅥,a'][𝅘𝅥,h'][𝅘𝅥,c''][𝅘𝅥,a'][𝅘𝅥,g'][𝅘𝅥,fis'][𝅘𝅥,g'] [𝅘𝅥,a'][𝅘𝅥,h']
[𝄽][𝅘𝅥,e'][𝅘𝅥,c'][𝅘𝅥,d'][𝅘𝅥,e'][𝅘𝅥,c'][𝅘𝅥,d'][𝅘𝅥,e'][𝅘𝅥,f'][𝅘𝅥,d'][𝅘𝅥,cis'][𝅘𝅥,d'][𝅘𝅥,e'][𝅘𝅥,f'][𝅘𝅥,d']
[𝅝,a^{-1}][𝅘𝅥,a^{-1}][𝅘𝅥,f^{-1}][𝅘𝅥,g^{-1}][𝅘𝅥,a^{-1}][𝅘𝅥,f^{-1}][𝅘𝅥,e^{-1}][𝅝,d^{-1}]

(6) ***n*-stimmige Sätze** S sind Notenfolgen gleicher Länge notiert als $S = \begin{matrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{matrix}$ mit
Länge($\begin{matrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{matrix}$) ≔ Länge($S_1$) und Stimmzahl($\begin{matrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{matrix}$) ≔ n
Für Notenfolgen A=$l_1...l_n$ und B=k_1 ... k_m gilt die **Komposition**:
AB ≔ l_1 ... $l_n k_1$ ... k_m ≔ (l_1 ... l_n)(k_1 ... k_m). Sie ist übertragbar auf n-stimmige Sätze $\begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}$ und $\begin{matrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix}$ durch $\begin{matrix} A_1 B_1 \\ \vdots \\ A_n B_n \end{matrix} ≔ \begin{matrix} A_1 B_1 \\ \vdots \\ A_n B_n \end{matrix}$
Wiederholungen des Satzes x werden folgendermaßen notiert:
x^2 ≔ |:x:| ≔ ||:x:|| ≔ xx und x^n ≔ |:x^n:| ≔ |:$x^{n\times}$:| ≔ $x^{n-1}x$ für n>2.

Wichtige Informationen stecken bei Sätzen in der Anordnung: die Position der Noten in der Notenfolge und die Schicht in der Stimmfolge. Will man auf einzelne Noten zugreifen, so sind sie durch diese Merkmale zu erweitern:

(7) Als **Stimme** gilt die Menge der erweiterten Noten $l_{i[\text{Position}(l_i)]}$ einer Notenfolge $l_1...l_m$ mit der **Position** als vererbten Zusatzmerkmal.
Ein ***n*-stimmiges Musikstück** M vereinigt die erweiterten Noten von n Stimmen gleicher Länge, wobei die p-te Note v_p der q-ten Stimme von M definiert ist als Erweiterung $M_{p,q}$ ≔ $v_{p[q]}$ mit der **Schicht** als Zusatzmerkmal.

(8) Beispiel: Das Musikstück $(5)_{\text{Takt 1}}$ ist die Vereinigung folgender erweiterter Stimmen:
1. Stimme = {[𝄽,0,1], [𝅘𝅥,c'',𝄽,1], [𝅘𝅥,a',2𝄽,1], [𝅘𝅥,h',3𝄽,1]}
2. Stimme = {[𝄽,0,2], [𝅘𝅥,e',𝄽,2], [𝅘𝅥,c',2𝄽,2], [𝅘𝅥,d',3𝄽,2]}
3. Stimme = {[𝅝,a^{-1},0,3]}

Satz und Musikstück sind gleichwertige Darstellungen. Denn der mehrstimmige Satz kann aus einem mehrstimmigen Musikstück wieder rekonstruiert werden: Sortiere die Noten nach der Schicht, ordne sie nach der Position als Notenfolge, lasse in Notenformeln überall die zwei letzten Merkmale weg.

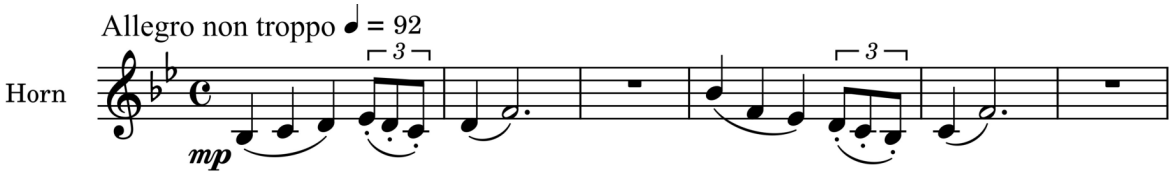
Oft schreiben Musiker auch mehrere Stimmen in ein Notensystem. Das Übersetzen solcher Notationsvarianten in die definierte Partiturnotation ist unproblematisch und muss hier nicht genauer präzisiert werden. Das gilt auch für Varianten von Achtel- oder Sechzehntelnoten, bei denen Balken statt Fähnchen stehen wie in späteren Beispielen (11) (25). Definiert werden auch keine anderen Noten- und Pausenzeichen als die Halbierungen in (2). Eine Dreiteilung zeigen Triolen an, die aber nicht auf Einzelnoten wirken, sondern auf eine Notenfolge und dabei die Dauer ihrer Noten oder Pausen verkleinern, aber sonstige Merkmale nicht verändern. Solche merkmaltreuen Abbildungen lassen sich allgemein präzisieren:

(9) α-**treu** heißen Abbildungen f mit $\alpha(x)=\alpha(f(x))$ für Abbildungen α und Noten x. Als **Hauptmerkmale** gelten die Abbildungen Dauer und Tonhöhe (3), Position und Schicht (7). **Schlichte Noten** haben nur Hauptmerkmale.
α-**Änderungen** sind μ-treue Abbildungen für Hauptmerkmale μ ungleich α.

Positions- und schichttreue Abbildungen sind auf jede Notenfolge mehrstimmiger Sätze direkt anwendbar. Dazu gehören Tonhöhenänderungen wie Transpositionen und Alterationen sowie Daueränderungen wie Vergrößerungen und Verkleinerungen, die bei Triolen angewandt werden:

(10) Die Ver-r-fachung v_r ist die Daueränderung, die die Dauer von Noten x stets mit r multipliziert: $\text{Dauer}(v_r(x))=r\cdot\text{Dauer}(x)$. Für Notenmengen M gilt die Abkürzung $rM := v_r(M)$. rM heißt r-fache **Verkleinerung** von M für $r<1$ und r-fache **Vergrößerung** von M für $r>1$.
Triolen: $\overset{\ulcorner 3 \urcorner}{M} := \underset{\llcorner 3 \lrcorner}{M} := {}^{2}/_{3}M$ für Notenmengen M.
***n*-olen**: $\overset{\ulcorner n \urcorner}{M} := \underset{\llcorner n \lrcorner}{M} := {}^{2^p}/_{n}M$ mit $p=\text{Maximum}\{m\in\mathbb{N}\,|\,2^m<n\}$.

(11) Beispiel mit Triolen: Johannes Brahms 2. Klavierkonzert, Hauptthema:



Zusatzangaben im Beispiel dienen zur Interpretation. Das genannte Instrument bestimmt die **Klangfarbe**. Sie wird mitunter geändert durch Vermerk der Spielweise, bei Streichern etwa *arco* oder *pizz*. Singstimmen liegen vor, wenn Noten durch Silben erweitert werden wie im Titelbild, formal ginge das nach (3). Die **Lautstärke** wird oft nicht notiert oder nur grob abgestuft als ***ppp*** < ***pp*** < ***p*** < ***mp*** < ***mf*** < ***f*** < ***ff*** < ***fff***: Die Zeichen und signalisieren Lautstärkeänderungen, die Musiker nach eigenem Ermessen interpretieren. Die **Artikulation** kann ebenfalls variieren: *Staccato*-Noten $\dot{x}$ und $\dot{x}$ verkürzt man und gleicht dies aus

durch eine Mini-Pause, so dass der Notenwert x die Gesamtdauer ist. Im Brahms-Thema zeigen Bögen die Artikulation *legato* an mit unverkürzten Noten und Bögen über Staccato-Noten ein *non legato* zwischen *staccato* und *legato*.

Noten können zudem mit unterschiedlichem **Tempo** gespielt werden. Erst eine Tempoangabe koppelt ihre Dauer an die Uhrzeit. Intuitive Tempi wie Adagio, Andante, Allegro lassen viel Ermessensspielraum. Seit 1815 werden sie mit dem Metronom genormt durch grobe Richtwerte: Adagio≈60, Andante≈100, Allegro≈120. Das Allegro non troppo ♩=92 im Brahms-Thema gibt aber keine Dauer an, wie die Gleichung suggeriert, sondern Schläge pro Minute. Die Dauer ist der reziproke Wert: Das Tempo $x=n$ bedeutet $x={}^{60}/_{n}$sec und das Tempo ♩=92 bei Brahms somit ♩$={}^{60}/_{92}$sec≈0,65sec. Musiker spielen aber nie stur im Metronomtakt, sondern wählen das Tempo flexibel und deuten durch *ritardando*, *accelerando* oder *a tempo* Tempowechsel an. Im Brahms-Konzert bestimmt ein Dirigent das Tempo, das Metrum, den Takt, den Rhythmus.

Die Definition des Rhythmus als Dauernfolge (χρόνων τάξις) stammt aus den *Rhythmischen Elementen* des antiken Musik-Mathematikers Aristoxenos um 330 v. Chr,[R34] besprochen im Buch *Antike Rhythmustheorien* [R]. Er beschrieb auch dreischichtige Rhythmusbildungen mit Silben, Tönen und Bewegungsfiguren.[R42] Abstrahiert man von solchen Merkmalen, dann lässt sich der Rhythmus beliebig komplexer Musikstücke bestimmen:

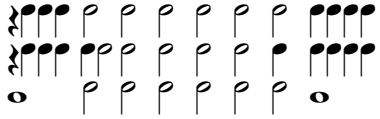
(12) Ein n-**schichtiger Rhythmus** ist ein n-stimmiger Satz, dessen Noten nur das Merkmal Dauer haben; sie haben die Form [y] und werden als y notiert, so dass jede Rhythmus-Stimme als Dauernfolge erscheint.

Rhythmus(x) ≔ [Dauer(x),Position(x),Schicht(x)] für Noten x von Musikstücken definiert eine dauer-, positions- und schichttreue Abbildung; sie bildet jedes Musikstück auf ein zweites ab; notiert als Satz wird es zum ein- oder mehrschichtigen Rhythmus.

Sätze mit demselben Rhythmus heißen **isorhythmisch**.

(13) Beispiele: Der Rhythmus des Brahms-Themas (11) lautet ||:♩ ♩ ♩ ♪♪♪ ♩ 𝅗𝅥. 𝄻:||.

Der Rhythmus von (5) lautet



Das Bach-Präludium (25) hat isorhythmische Stimmen.

Bei komplexen Rhythmen überlagern sich die rhythmischen Schichten und erzeugen einen komplementären Gesamtrhythmus, der sich bestimmen lässt:

(14) Ordnet man alle Noten-Enden eines Musikstücks M als $e_m>...>e_1$ und setzt $e_0 ≔ 0$, dann gilt $[e_1–e_0]...[e_m–e_{m-1}]$ als **Komplementär-Rhythmus** von M.

(15) Beispiel: Der Komplementär-Rhythmus von (5) lautet ||:𝄽𝄽𝄽𝄽:||^{5}

Aristoxenos bezog auch den Sprachrhythmus aus der Dichtung ein. Seit Homer war der Hexameter –∪∪–∪∪–∪∪–∪∪–∪∪–∪∪ der wichtigste Versrhythmus mit langen Silben − und halb so langen kurzen Silben ∪ .[R25+30] Der Daktylos –∪∪, das Maß oder Metrum, konnte in Versen durch den Spondeus −− ersetzt werden; der Hexameter wurde also als Maßband an variable Verse angelegt. Das Messen ist hier das gedankliche Wiederholen des Metrums parallel zu einem Satz; formal beschrieben ist es ein mehrschichtiger Satz:

(16) Ein Rhythmus T, bei dem aus $T{=}X^m$ stets $m{=}1$ folgt, gilt als **Metrum** und ein mehrstimmiger Satz $\frac{S}{T^n}$ als **Satz im Metrum** T.

Sechs antike Metren, nämlich –∪, ∪–, –∪∪, ∪∪–, −− und ∪∪∪,[R56] lagen den rhythmischen Modi der Musik der Notre-Dame-Epoche zugrunde. In der *Ars nova* um 1320 ging Philipp de Vitry von solchen Metren mit Längen und Kürzen über zu Mensuren mit gleichmäßiger Drei- oder Zweiteilung der Noten. Sein Prinzip ist allgemein definierbar, ebenso seine Mensurvorzeichnung, die ein parallel wiederholtes Metrum symbolisiert; beides ist auch bei heutigen Takten üblich:

(17) n-teilung$(x) \coloneqq {}^{1}\!/_{n}\,(x^n)$ für Sätze x

Mensuren sind mehrschichtige Metren, deren erster Rhythmus ein Notenwert ist und deren i-te Schicht stets eine Zwei- oder Dreiteilung der darüber liegenden Schicht i–1 ist.

Für Sätze $\frac{S}{T^n}$ im Metrum T gilt die **Taktvorzeichung** $\overline{\overline{\overline{T}}}S \coloneqq \frac{S}{T^n}$, für Sätze $\overline{\overline{\overline{T}}}S$ gilt daher **Taktzahl**$(S) \coloneqq {}^{\text{Länge}(S)}\!/_{\text{Länge}(T)}$.

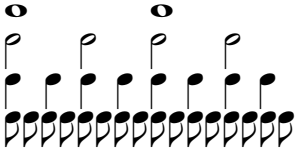
Lange wurde nur die Mensur vorgezeichnet; beim Lesen ging daher leicht die Orientierung verloren. Später beseitigte man dieses Leseproblem durch eingefügte Taktstriche, die das wiederholte Metrum markieren:

(18) Für Mensuren T wird der **Taktstrich** $|T \coloneqq T$ definiert. Somit gilt für T:

$T|T{=}TT$, $T|T|T{=}TTT$, $T|T|T|T{=}TTTT$ etc. Bei Sätzen $\overline{\overline{\overline{T}}}S$ kann der Taktstrich in den parallelen Satz S übertragen werden.

Als nach 1600 Noten eindeutig definiert wurden, blieben von den alten Mensuren nur zwei gerade Mensuren übrig: das tempus imperfectum C und im doppelten Tempo das tempus imperfectum diminutum ¢. Das Tempo ist in der Mensur nicht sichtbar, daher sehen beide Mensuren in aktuellen Notenwerten so aus:

(19)



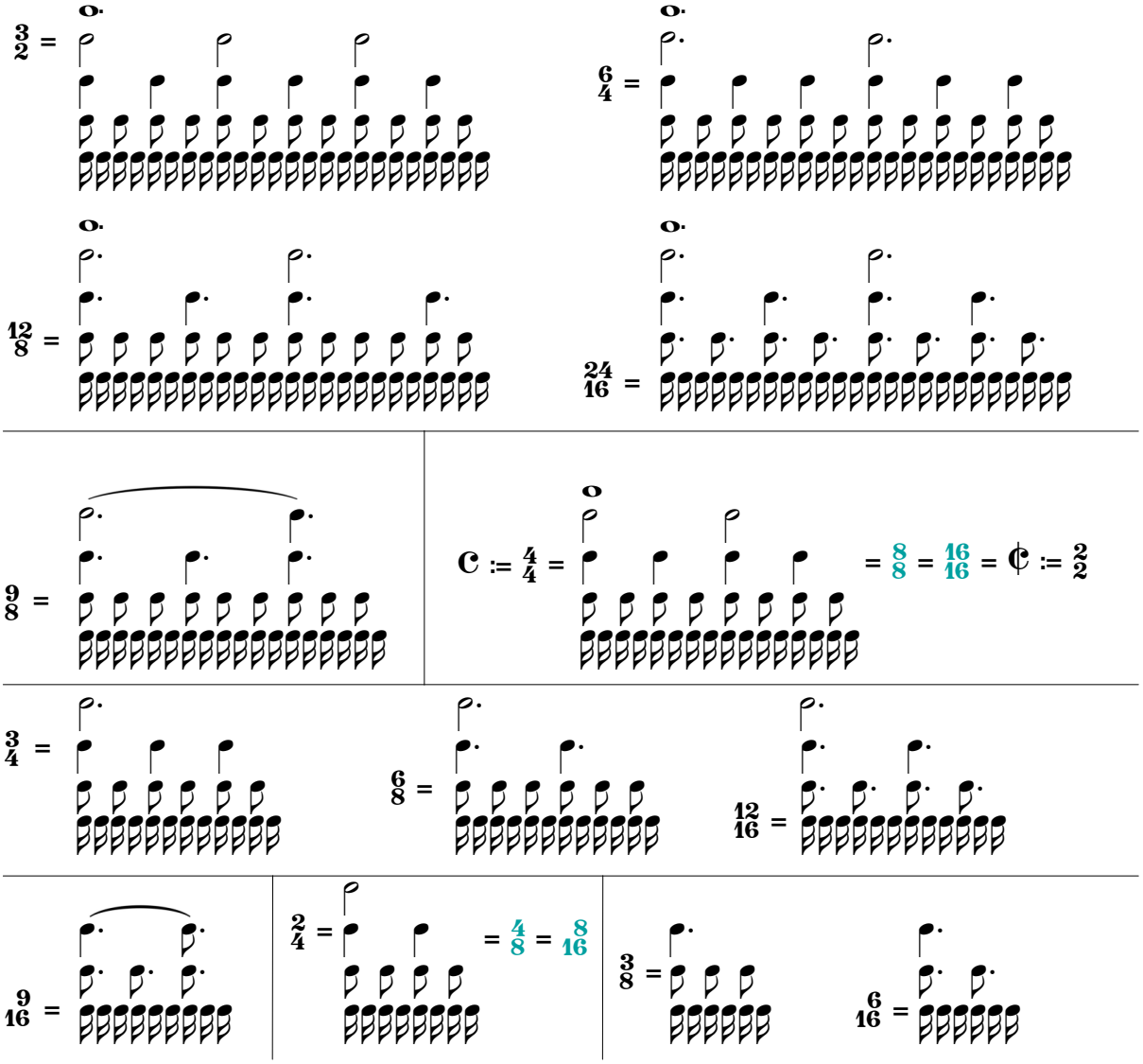
Die Mensurzeichen wurden später stilisiert und verkleinert als Zwei-Halbe-Takt 𝄵 und Viervierteltakt 𝄴 wie in (5) und (11). Takte mit Dreierteilung waren nach wie vor möglich, wurden aber umgeschrieben in definierte Noten:

(20) Der ***z*-*n*-tel-Takt** kurz $\frac{z}{n}$ ist die Mensur mit $1/4 < z/n \leqslant 3/2$ und kürzester Note $\frac{1}{n}$ und einer Stimme mit z-facher Wiederholung von $\frac{1}{n}$ laut (2), die eine Dreiteilung der darüber liegenden Stimme ist, falls 3 ein Teiler von z ist.

Eine Tabelle listet die möglichen Takte auf. Anschließend werden sie explizit angegeben und nach der Länge sortiert, damit der Unterschied sichtbar wird:

(21)

n \ z	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	mögliche *z*-*n*-tel-Takte
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$									Graue Felder: zu große oder zu kleine Takte.
4	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{4}$							Grüne Takte sind identisch mit $\frac{2}{4}$ oder $\frac{4}{4}$.
8		$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{12}{8}$				Leerfeld: $\frac{18}{16}$ ist keine eindeutige Takt-Kennzeichnung!
16				$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{16}$		$\frac{24}{16}$	



Eine berühmte Mustersammlung für dieses Taktsystem ist *Das Wohltemperierte Klavier* von Bach mit zwei Serien von Präludien und Fugen in allen Tonarten; dort kommen alle definierten Takte vor bis auf den $\frac{9}{16}$-Takt:

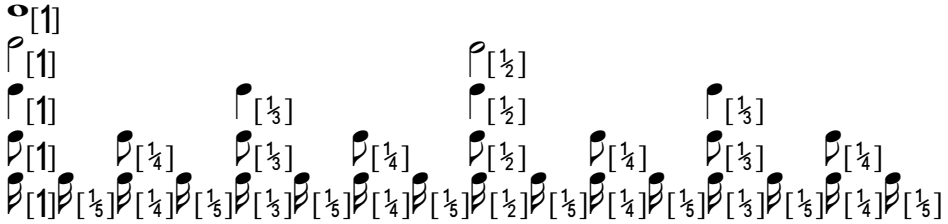
(22)

Takte im *Wohltemperierten Klavier* von Johann Sebastian Bach											
3/2	6/4	12/8	24/16	9/8	¢ 2/2	c 4/4	3/4	6/8	12/16	2/4	3/8	6/16
I P8	I P4 I F14	I P9 I P11	I P15	I F19 I P20	I F4 I F22	oft: 25 P 22 F	I F6 I P10 I P17 I F21	I F15 I P18	I P13		I P3 I F11*	
II P11 II F22		II P5 II P19		II P4 II P8	II F5 II F7 II F9 II F10* II F13* II P22 II F23		II P6 II P9 II P13 II P14 II P15 II F16 II P17 II F21	II F18	II F4 II P21	II F1 II P12* II F12*	II P10 II F15 II F24*	II F11
P=Präludium, F=Fuge, *auftaktige Stücke												

Dirigenten geben den Takt durch den Schlag der Hand an. Schlagfiguren waren seit je her Auf und Ab. Schon Aristoxenos beschrieb damit Metren,[R42] und Augustinus sprach in *De musica* von der Hebung und Senkung der Hand.[R88f] Mit ↑ ≔ Auf und ↓ ≔ Ab ergibt sich ein Zweiertakt ↓↑. Mit seitlichen Schlägen → ≔ rechts und ← ≔ links entsteht der Dreivierteltakt ↓→↑ und der Viervierteltakt ↓←→↑. Stets betont ein Ab den Taktanfang, andere Schläge sind weniger betont. Eine noch stärker differenzierte gewichtete Betonung kann in Mensuren und Takten quantitativ präzise definiert werden:

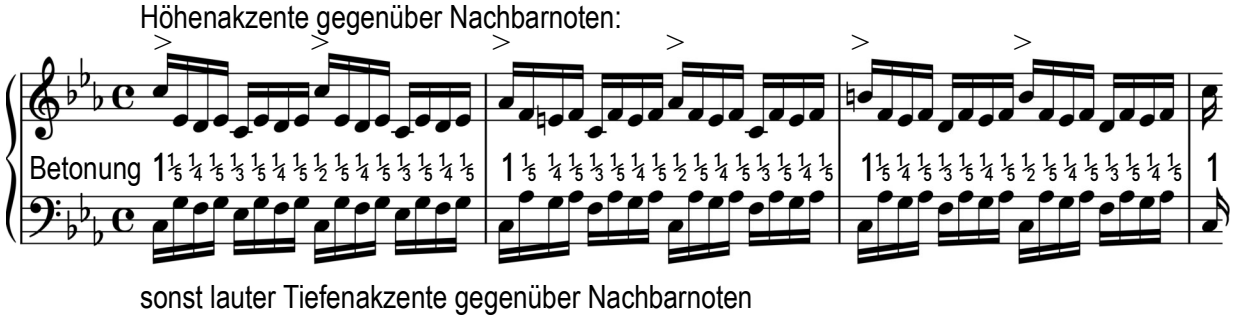
(23) Für und Noten x von Sätzen $\overline{\overline{T}}S$ mit Taktzahl(S)=s gilt:
Gewicht(x) ≔ Zahl der Noten y von T^s mit Position(x)=Position(y)
Betonung(x) ≔ $^1/_{1+\text{Stimmzahl}(T)-\text{Gewicht}(x)}$
Akzentuiertes M heißt die Menge erweiterter Noten $x_{[\text{Betonung}(x)]}$ mit dem **Akzent** als Zusatzmerkmal für Noten x aus M.
x ist **betonter** als y ≔ x ist **schwerer** als y ≔ Betonung(x)>Betonung(y)
x ist **leichter** als y ≔ y ist schwerer als x

(24) Beispiel: Akzentuierter $\frac{4}{4}$-Takt:



Die Betonung im Takt hängt natürlich zusammen mit parallelen Musikstücken, denn sie lässt sich auf unterschiedliche Weise musikalisch realisieren: Mit dem **Längenakzent** länger = betonter hängt die Betonungsdefinition zusammen. Ein **Lautstärkenakzent** mit lauter = betonter wirkt hörbar. In Melodien erzeugt der **Höhenakzent** die Wirkung höher = betonter, im Bass dagegen erzeugt der **Tiefenakzent** den Eindruck tiefer = betonter. Ein Musterbeispiel für die Kombination des Höhen- und Tiefenakzents ist folgendes Präludium von Bach:

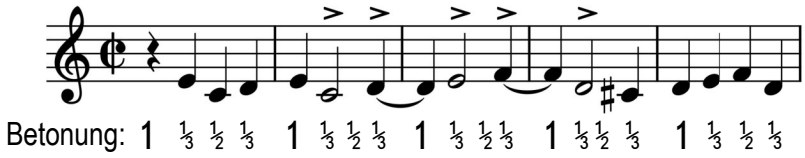
(25) Beispiel: Bach: Wohltemperiertes Klavier I Präludium 2 mit Betonungsanalyse:



Akzente gegen die Betonung erzeugen rhythmische Kontraste. Augustinus beschrieb erstmals Längenakzente gegen die Betonung;[R97f] später nannte man sie Synkopen, weil sie unbetonte Noten mit betonteren zusammenbinden (von συγκοπή=Zusammenstoß):

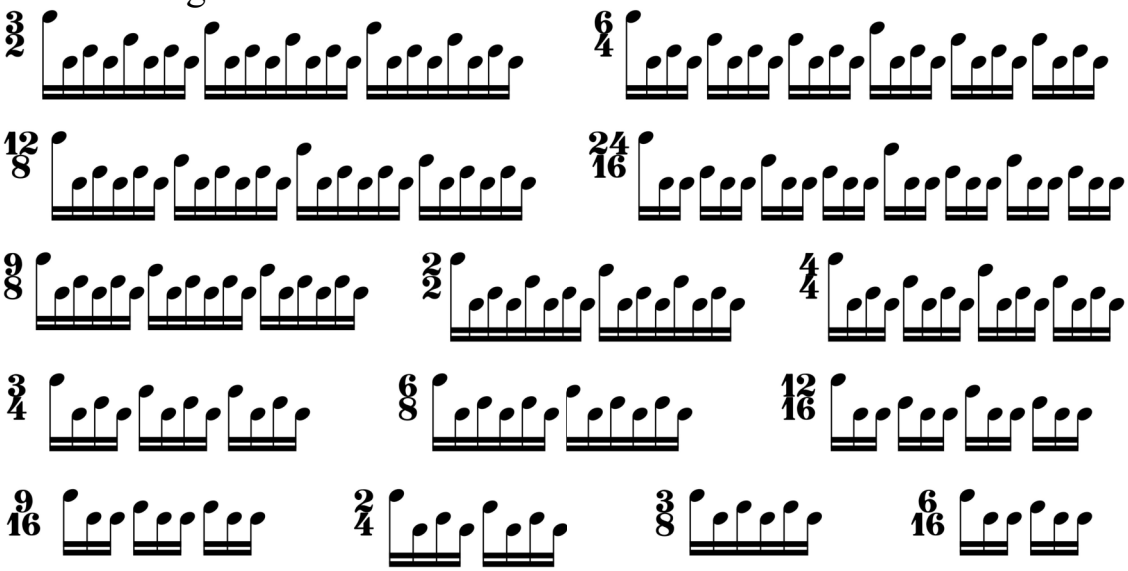
(26) Eine **Synkope** in Sätzen $\overline{\overline{T}}S$ ist eine Bindung $x\frown z$, bei der x leichter als z ist. Die Synkope $x\frown z$ ist umrechenbar in eine längere Note laut (2).

(27) Beispiel: (5) 2. Stimme: Synkopenkette mit Akzenten markiert:



Mit Hilfe des Höhenakzents können Takte in eine anschauliche Kurzform überführt werden. Man gruppiert ihre im Höhenakzent betonten Sechzehntel mit Sechzehntel-Balken nach dem Nenner des Takts und lässt anschließend die Notenlinien weg:

(28)



Offenbar ist aus der Kurzform der Takt wieder rekonstruierbar: Man bindet die Notenwerte mit minimaler Betonung an die vorausgehende betontere Note und übernimmt deren Betonung und erhält die nächsthöhere Schicht. Dieser Vorgang wird so oft wie möglich wiederholt. Der Rhythmus der erzeugten Schich-

ten ergibt den Takt. Offenbar ist also die Betonung im Takt identisch mit dem Akzent in der Kurzform. Letztere wird in der Präzisierung von der Mensur mit indiziertem Akzent $_>$ unterschieden:

(29) $T_>$ ≔ akzentuierter Komplementär-Rhythmus der Mensur T.

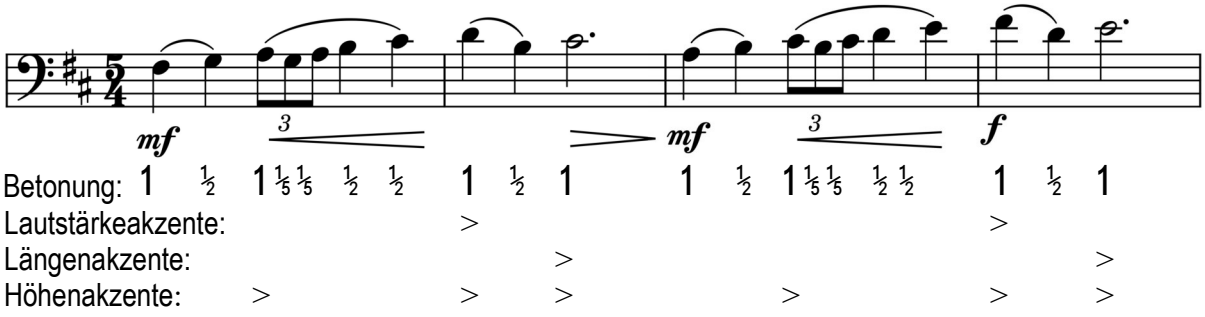
Für Noten x von Sätzen $\overline{\overline{T}}S$ mit Taktzahl(S)=s gilt für y aus $T_>{}^s$ mit Position(x)=Position(y) offenbar: Betonung(x)=Akzent(y).

Über diese akzentuierten Metren lassen sich auch auftaktige Metren definieren. In der alten Musik galt ausnahmslos die Volltaktigkeit, denn Mensuren sind unzerlegbar und besitzen keinen weniger betonten Taktteil als Auftakt. Noch im *Wohltemperierten Klavier* beginnen fast alle Stücke volltaktig: Im ersten Teil gibt es nur eine Ausnahme und im zweiten nur fünf (22). Solche auftaktigen Musikstücke richten ihre Akzente nach auftaktigen Metren, die durch zyklische Permutationen akzentuierter Metren gewonnen werden:

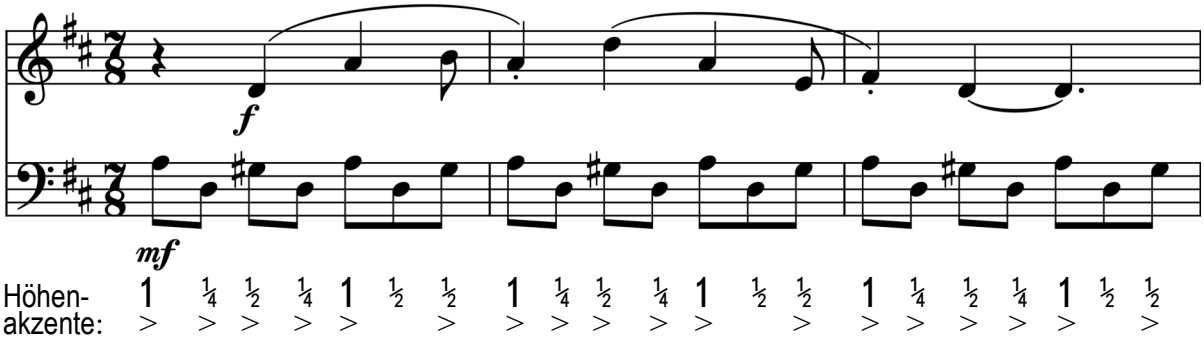
(30) **Volltaktig** heißen akzentuierte Komplementär-Rhythmen $T_>$ laut (29).
Auftaktig heißt ein Metrum AB, falls BA volltaktig ist; der Taktstrich wird hier in die Mitte gesetzt $A|B$ ≔ AB und A heißt dann der **Auftakt** von $A|B$.

Die definierten Taktarten blieben auch für spätere Epochen maßgeblich. Nur selten trifft man andere Taktarten an, die zwei Metren zusammensetzen zu einem neuen Metrum, das die Definition erfüllt (16). Beispiele aus der antiken Metrik von Dionysios Thrax sind der Paion –∪∪∪ und der Epitritos – – –∪ und deren zyklische Permutationen.[R56] Es sind Vorläufer von Fünfer- und Siebenertakten, die einen regelmäßigen Taktwechsel (ohne Taktstrich) erzeugen. Zwei prominente Beispiele führen das vor Augen:

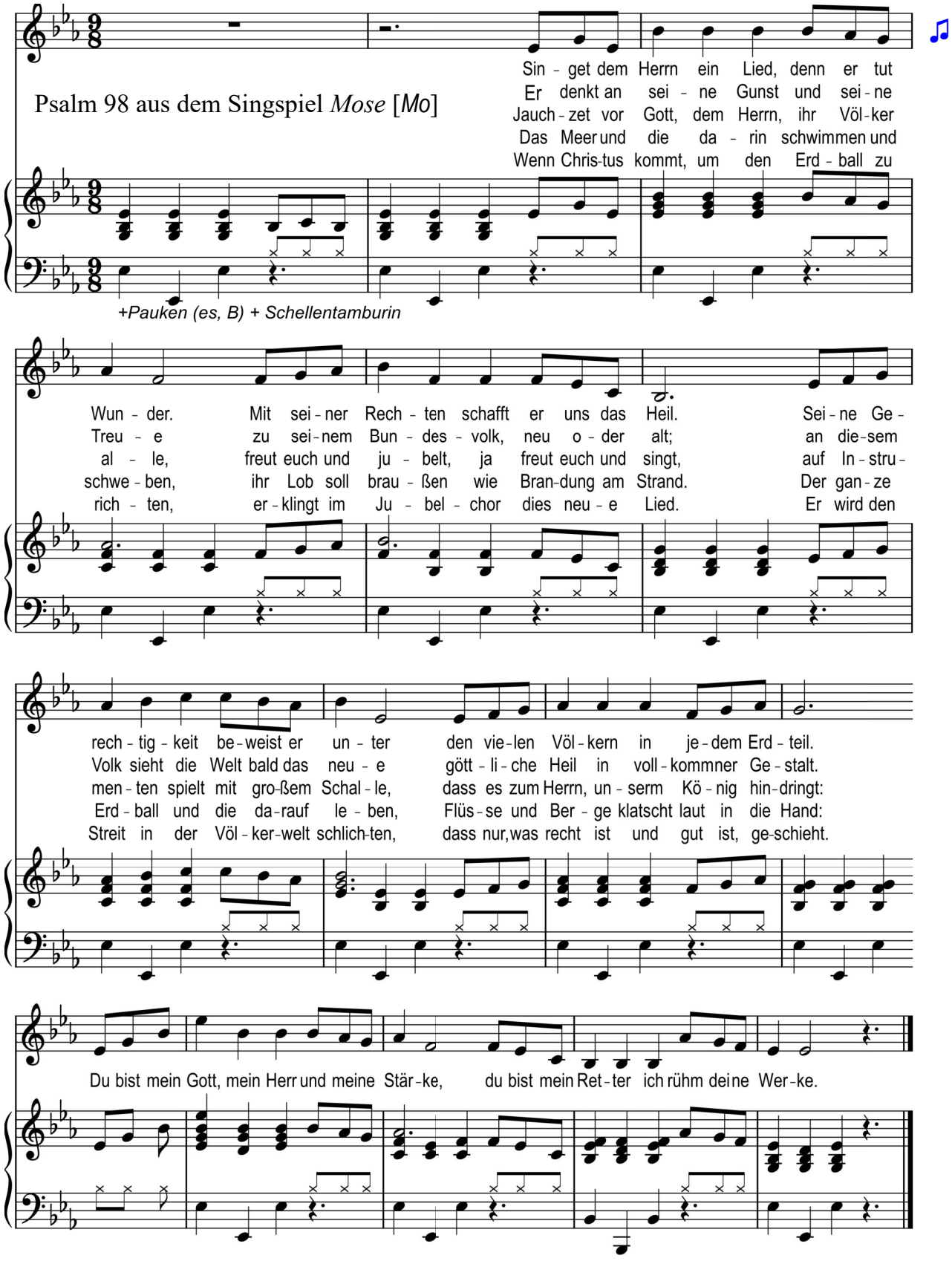
(31) Beispiel: Tschaikowky 6. Sinfonie, Satz 2 im $\frac{5}{4}$-Takt = $\frac{2}{4}\,\frac{3}{4}$, regulär akzentuiert:



(32) Beispiel: Bartok *Mikrokosmos* 113 im $\frac{7}{8}$-Takt = $\frac{4}{8}\,\frac{3}{8}$, Ostinato im Höhenakzent:


f
mf
Höhen-akzente: 1 ¼ ½ ¼ 1 ½ ½ 1 ¼ ½ ¼ 1 ½ ½ 1 ¼ ½ ¼ 1 ½ ½
> > > > > > > > > > > > > > > > > > > >
> > > > > > > > > > > > > > > > > > > >
> > > > > > > > > > > > > > > > > > > >

Weil ein Achtelschlag zu hektisch beim Dirigieren wäre, ist es besser, diesen Siebenachteltakt als Dreiertakt ↓→↑ mit gedehntem $\frac{3}{8}$-Auftakt zu schlagen. Mit demselben Auftakt entsteht beim Vierertakt ↓←→↑ das Metrum $\frac{3}{4}\frac{3}{8}$ als modifizierter $\frac{9}{8}$-Takt wie im folgenden Beispiel:



Literatur

[*R*] Neumaier, W.: *Antike Rhythmustheorien*. Historische Form und aktuelle Substanz, Amsterdam 1989.

[*Mo*] Neumaier, W.: *Mose*. Singspiel, 1993. Strube Verlag München Edition 1311.

[*K*] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024.

[*MM*] Neumaier, W.: *Musik-Mathematik kurz gefasst*, Heft 1-5:
- [*H*] *Unser harmonisches Tonsystem*, 2025
- [*N*] *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025.
- [*Kp*] *Kontrapunkt oder Komposition*, 2025.
- [*Dp*] *Doppelter Kontrapunkt*, 2026.
- [*KT*] *Kanontechnik*, 2026.

Download von [*K*][*MM*]: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft

Historische Quellen

Aristoxenos: *Rhytmische Elemente*, um 330 v.Chr.
zu seiner Rhythmik: [*R*] S.33-53

Augustinus: *De musica*, um 378.
zu seiner Rhythmik: [*R*] S.79-105

Dionysios Thrax: *Techne grammatike*, 2.Jh.v.Chr.
zu seiner Metrik: [*R*] S.27ff+55ff

Guido von Arezzo, *Epistula de inveniendo ignotu cantu*, um 1030. Faksimile online:
https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/item/HJJ7B33HUUJ-FIPLHSRGJKPAT4THNAXEW

Johannes de Garlandia: *De mensurabili musica*, um 1240.

Philipp de Vitry: *Ars nova*, um 1322.

Scheidt, Samuel: *Tabulatura nova*, Hamburg 1624.
Faksimile des Notenbeispiels online:
https://sachsen.digital/werkansicht?tx_dlf[id]=8616&tx_dlf[page]=63

Titelbild: Guidos Melodie in Neumen, in: Guido von Arezzo, *Epistula de inveniendo ignotu cantu* S. 97r. Faksimile siehe oben (Public domain: CCO 1.0 Universal). Das Faksimile hat dort undeutliche Notenlinien, die im Titelbild an die Notenlinien auf S. 97v. angeglichen wurden.

***

Update September 2026