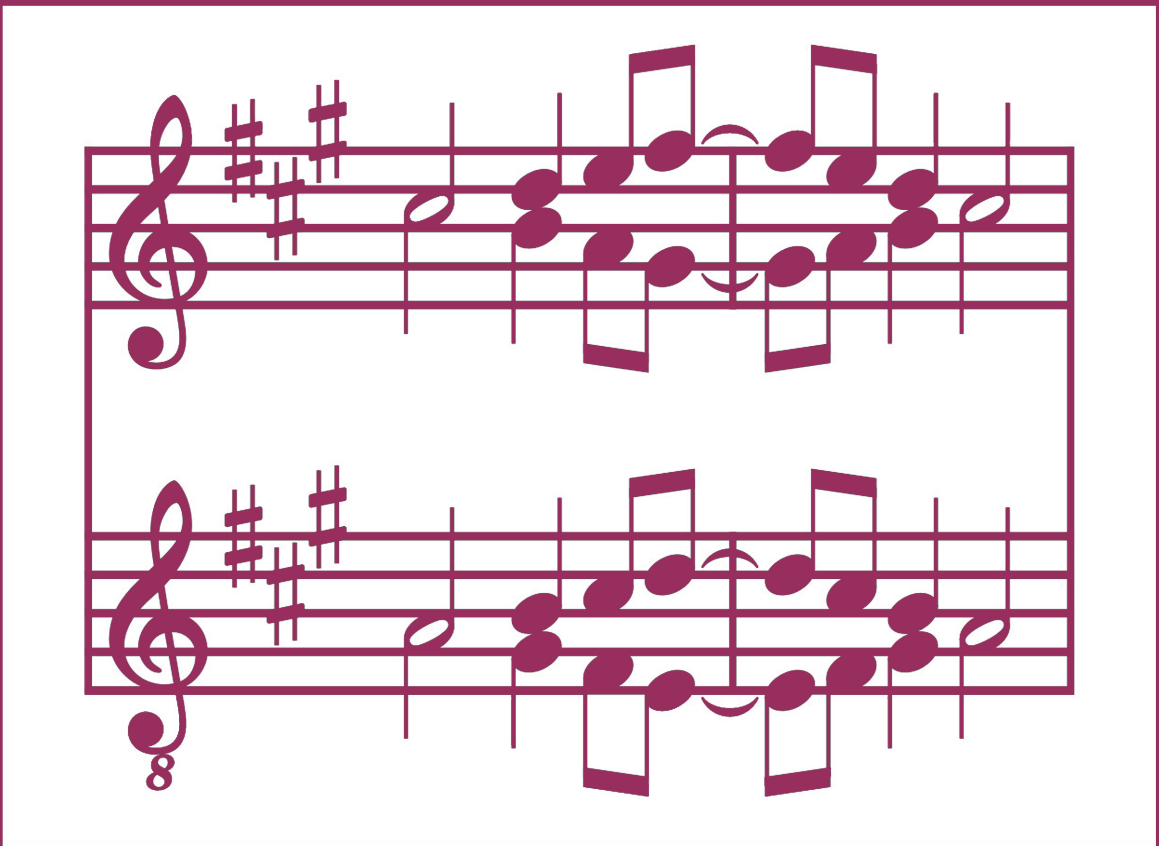
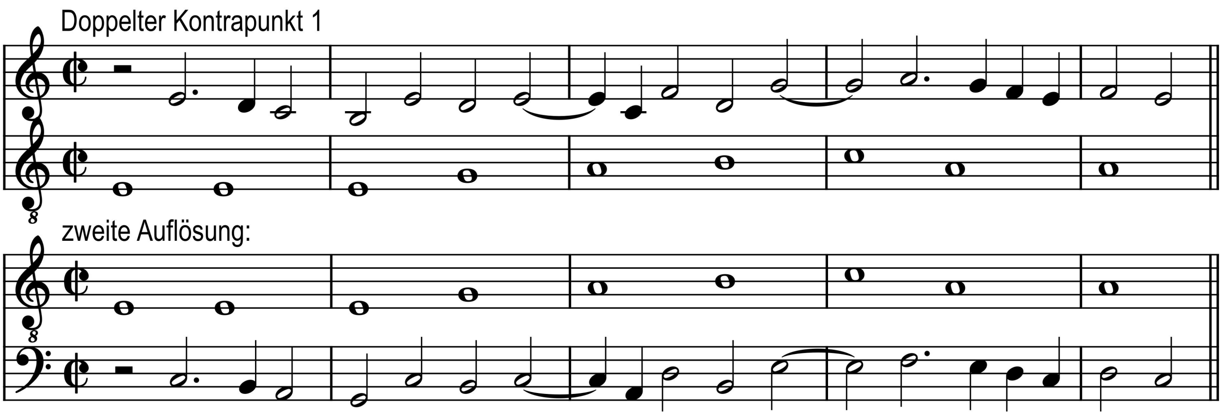
DOPPELTER KONTRAPUNKT

Heft 4
Wilfried Neumaier
Februar 2026

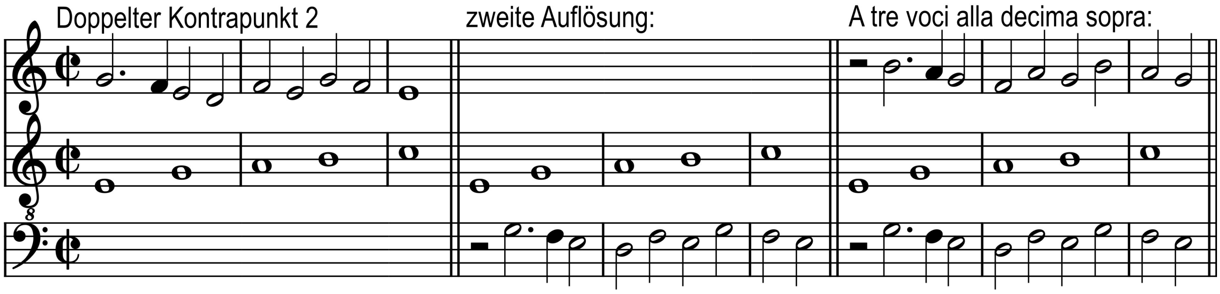
Musik-Mathematik
kurz gefasst

Im Heft KONTRAPUNKT ODER KOMPOSITION [*Kp*], das die Mathematik des Kontrapunkts präzisiert, ist eine Spezialtechnik noch ausgeklammert: der doppelte Kontrapunkt. Erstmals behandelte **Nicola Vicentino** (1511-1576) dieses Thema in seinem Buch *L'antica musica ridotta alla moderna prattica* 1555 [*V*]. Er erklärte den doppelten Kontrapunkt als doppelte Komposition, und zwar als eine Art Kanon (fuga), der kein eigentlicher Kanon ist, sich aber manchmal als Kanon zwischen Ober- und Unterstimme zu einem Cantus firmus einpassen lässt.[V34] Das heißt: Wie bei einem Kanon wird aus einer Komposition eine zweite abgeleitet, entweder als separate Komposition oder vereinigt mit der ersten als Kanon. Seine Beispiele zeigen, dass er den doppelten Kontrapunkt nicht bloß als Stimmtauschtechnik verstand, wie es später üblich wurde. Diese Technik behandelte er natürlich auch, und zwar gleich im ersten Beispiel; es ist ein **doppelter Kontrapunkt der Dezime**, bei dem er die Oberstimme um eine Dezime verschob unter den Cantus firmus in ganzen Noten:[V34 Notenbeispiel 1]

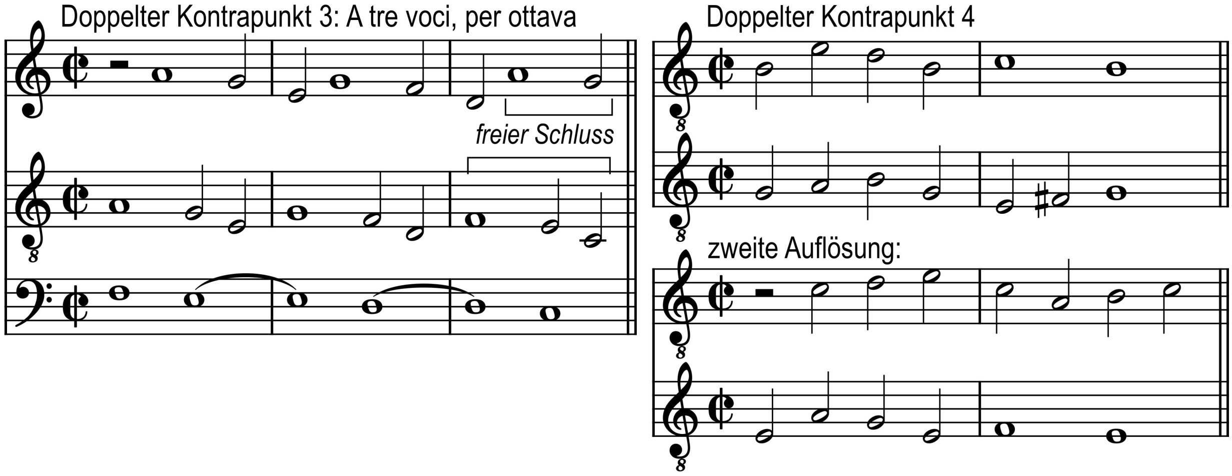
(1)


Für doppelte Kontrapunkte der Dezime gilt seine Regel: Terz- und Sextparallelen sind nicht erlaubt, denn sie erzeugen verbotene Oktav- oder Quintparallelen.

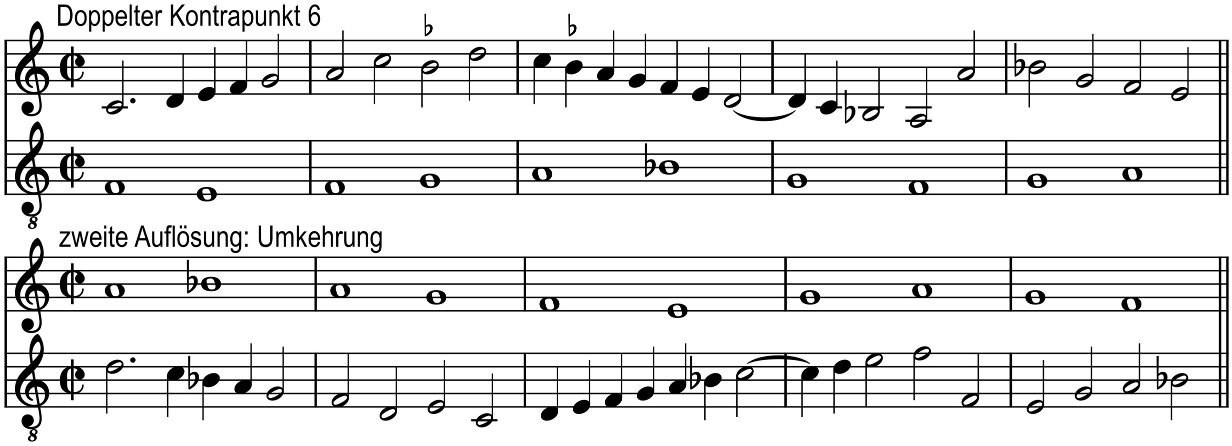
Sein zweites Beispiel ist ein **doppelter Kontrapunkt mit Zeitversetzung** nach einer Pause, der über die Stimmtauschtechnik hinausgeht. Er notierte nur eine zweistimmige Auflösung, deutete aber eine dreistimmige Auflösung verbal an durch eine Kanonvorschrift, die wohl einen Dezimparallelkanon zum Cantus firmus meint:[V34 Notenbeispiel 2]

(2)


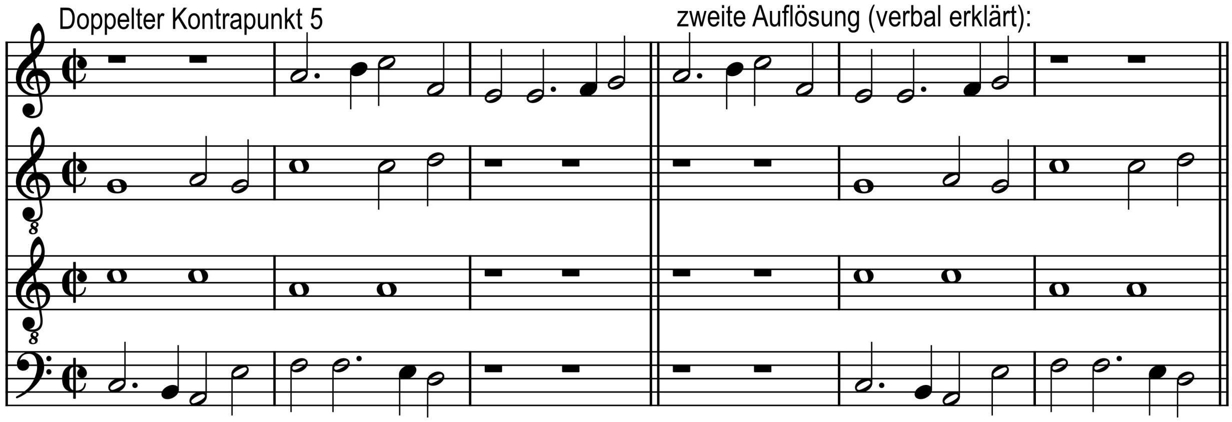
Er fügte noch zwei doppelte Kontrapunkte mit Zeitversetzung hinzu, einen gleich dreistimmig kombiniert zum Oktavkanon (mit freiem Schluss) über einem Cantus firmus in langen Noten:[V34 Notenbeispiel 3+4]

(3)


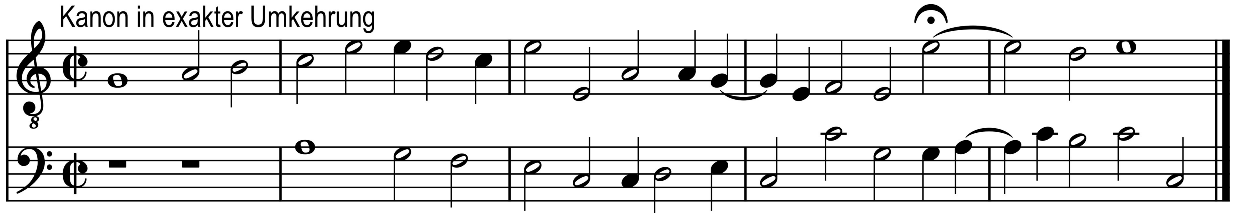
Im nächsten Kapitel folgt je ein **doppelter Kontrapunkt der Umkehrung** zu beiden Typen: als separate Kompositionen und als Kanon-Kombination. Im ersten Fall wird der komplette Kontrapunkt an einer imaginären Tonhöhe gespiegelt, so dass alle Intervalle die Richtung wechseln:[V35 Notenbeispiel 2]

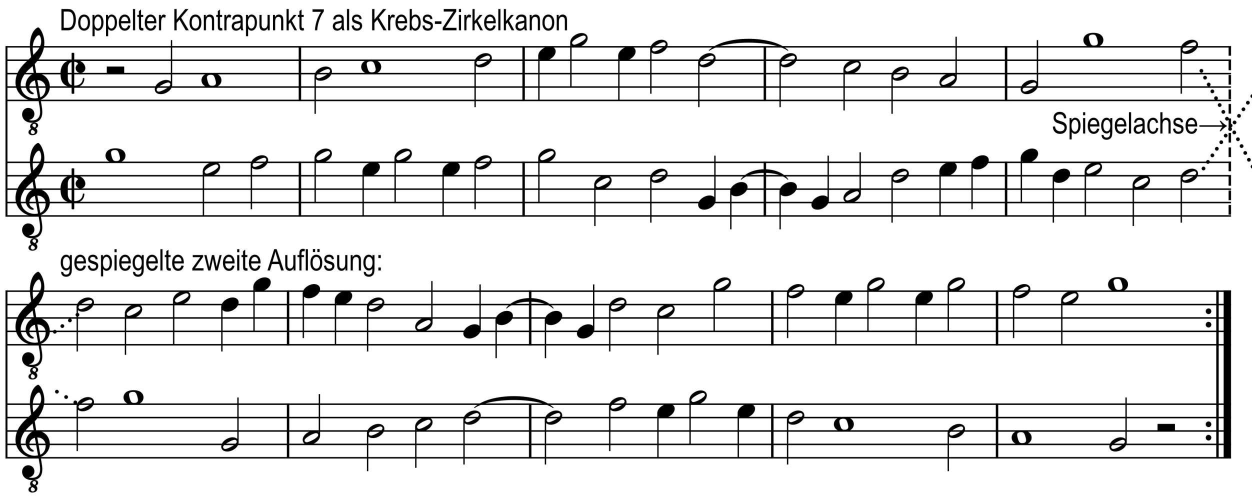
(4)


Bei einer genauen Umkehrung hätte Vicentino generell ein ♭ vorzeichnen müssen; das fehlt aber an den beiden markierten Stellen. Es liegt also eine Alteration einer genauen Spiegelung vor. Das gilt auch für das andere Beispiel, das die Umkehrung in einem Kanon kombiniert:[V35 Notenbeispiel 1]

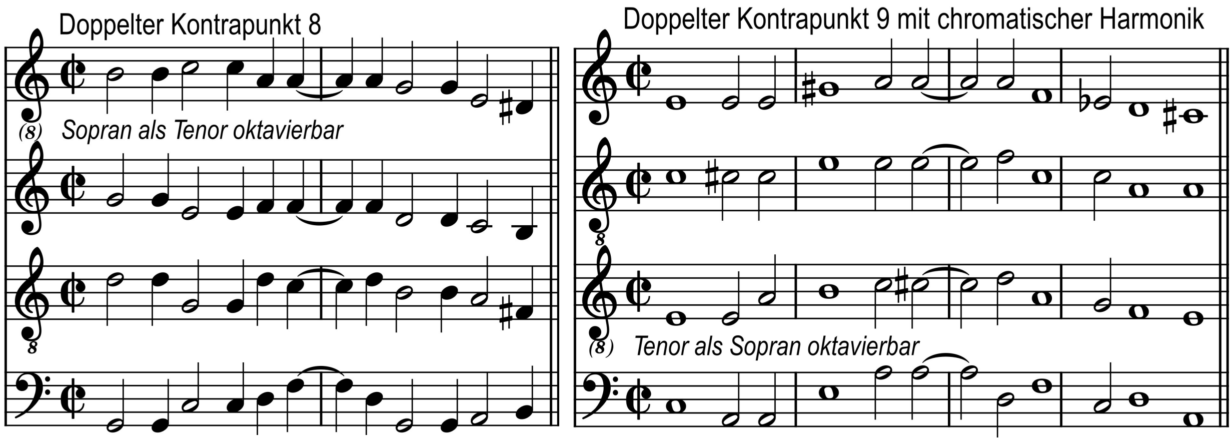
(5)


Hier komponierte Vicentino zur freien Tenor- und Altstimme den doppelten Kontrapunkt als Umkehrungskanon. Auf diesen Kanon wandte er bei der zweiten Auflösung den doppelten Kontrapunkt der Umkehrung nochmals an und zeigte den interessanten Effekt: Es entsteht eine Zeitversetzung des Kanons samt der Tenor- und Altstimme. In einem ähnlichen Umkehrungskanon (ohne doppelten Kontrapunkt) wandte er eine genaue Spiegelung an:[V32 Notenbeispiel 3]

(6)

Er gab stets nur kurze Beispiel-Skizzen, die einem Schüler zeigen, wie das Prinzip funktioniert. An eigenen Kanonkompositionen lag ihm nicht viel. Er sagte, dass Kanons nur durch ihre kunstvolle Gestaltung bestechen, weil die Kanonstruktur die volle Harmonie und schöne Melodie behindert.[V37] Nur eine Struktur reizte ihn zur expliziten Ausarbeitung: Er komponierte zuerst die Oberstimme bis zur Mitte, dann die Unterstimme bis zur Mitte, spiegelte dann die vertauschten Stimmen an der Mitte und verband sie zu einem Krebs-Zirkelkanon, den er einstimmig notierte; seine Kompositionsanweisung ergibt die zweistimmige Auflösung als **doppelter Kontrapunkt mit Spiegelung an einer Zeitachse**:[V37]

(7)

Als Kompositionsregel gab er an: Der Schüler darf weder einen dissonanten Vorhalt setzen noch eine dissonante Zwischennote noch punktierte Noten, die rückwärts Synkopen erzeugen.[V37] Sein Kanon hat daher gar keine Dissonanzen.

Abschließend behandelte er nur noch zwei praktische Beispiele, in denen ein **doppelter Kontrapunkt der Oktave** angewandt wird. Er nannte als Regel, keine Quinten zu setzen, da beim Oktavieren nach unten Quarten entstehen, die einen falschen Bass erzeugen. Das Problem löste er durch einen zusätzlichen passenden Bass. Beim ersten Beispiel, das dem Mangel an hohen Sopran-Männerstimmen in der damaligen Chorpraxis abhelfen sollte, kann der Sopran als Tenor gesungen werden. Beim zweiten Beispiel mit chromatischer Harmonik, die er erstmals propagierte, kann umgekehrt der Tenor als Sopran gesungen werden. Die Vertauschungen zeigen ad lib. oktavierte Violinschlüssel an:[V38+39]

(8) 

Vicentino schrieb für Praktiker und deutete die formale Seite nur an, als er den doppelten Kontrapunkt als Art Kanon (fuga) bezeichnete. Er meinte die für den Kanon typische **Abbildungstechnik**, die auch beim doppelten Kontrapunkt stattfindet. Zuerst nannte er den Stimmtausch. Formal nummeriert dieser die Stimmen mehrstimmiger Sätze um durch eine Zahlenpermutation und ändert nur die Schicht als einziges Notenmerkmal:[N(9)]

(9) Ein **Stimmtausch** ist eine Schichtänderung s n-stimmiger Musikstücke mit Schicht($s(x)$)=π(Schicht(x)) für eine Permutation π der Zahlen 1 bis n und Noten x. Mit $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(n))$ ergeben sich für n=3 folgende Fälle:

Permutation π	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,1,2)
Stimmtausch π(A B C)	A B C	A C B	B A C	C A B	B C A	C B A

Ein Stimmtausch allein ist musikalisch wirkungslos. Vicentino verknüpfte ihn stets mit anderen Abbildungen, bei denen sich die Tonlage der Stimmen verändert. Der Stimmtausch ordnet dann normalerweise die abgebildeten Stimmen der Tonlage nach von oben nach unten: Sopran, Alt, Tenor, Bass. Den Wechsel der Tonlage bewirken Tonhöhenänderungen, die mit einem **Intervalloperator**, der auf Töne wirkt und bei Pausen wirkungslos ist, präzisiert werden können:

(10) Für Noten $x=[x_1,\ldots,x_n]$ laut *N*(3) und Intervalle i wird definiert:
$x+i \coloneqq [x_1, x_2+i,\ldots,x_n]$, falls x ein Ton mit Tonhöhe x_2 laut *N*(3) ist,
$x+i \coloneqq x$, falls x eine Pause ist, und $x-i \coloneqq x+(-x)$.
Offenbar gilt: $(x+i)+j=x+(i+j)$ — *assoziativer Operator*
$x+i+j=x+j+i$ — *kommutativer Operator*
Ferner gilt:[1] $(x+i)-(y+i) = x-y$
Tonhöhe($x+i$)=Tonhöhe(x)$+i$
$\mu(x+i)=\mu(x)$ für andere Notenmerkmale μ
— *intervalltreuer Tonhöhenoperator*

[1] Mit Definitionen (10) und Intervalldefinitionen *Kp*(1) gilt mit Abkürzung Tx ≔ Tonhöhe(x): $T(x+i) = T[x_1, x_2+i,\ldots,x_n] = x_2+i = T[x_1, x_2,\ldots,x_n]+i = Tx+i$. Für Noten gilt $(x+i)-(y+i) = T(x+i)-T(y+i) = Tx+i-(Ty+i) = Tx-Ty = x-y$; für Pausen x gilt $(x+i)-(y+i) = x-(y+i) = 0 = x-y$, für Pausen y ebenso $(x+i)-(y+i) = (x+i)-y = 0 = x-y$.

Oktavtranspositionen wie in (8) sind Spezialfälle eines bereits definierten Abbildungstyps, die per Intervalloperator genauer bestimmt werden:

(11) Als ***i*-Transposition** oder **Transposition um *i*** für ein Intervall i gilt die durch $\tau_i(x) \coloneqq x+i$ definierte Abbildung τ_i. Sie ist wegen (10) eine intervalltreue Transposition laut *Kp*(3).
Für Notenmengen A gilt: $\tau_i(A) \coloneqq A+i \coloneqq \{x+i|x\in A\}$ und $A-i \coloneqq \{x-i|x\in A\}$.

Der doppelte Kontrapunkt (1) nutzt eine nicht-intervalltreue, aber vorzeichentreue Transposition der Melodie (von phrygisch nach mixolydisch) und addiert eine große oder kleine Unterdezime. Die Tonhöhenänderung variiert hier also punktuell ein wenig. Prinzipiell kann jeder Ton in Musikstücken die Tonhöhe frei ändern, denn das addierte Intervall ist für jeden Ton einzeln berechenbar:

(12) Für Tonhöhenänderungen f des Musikstücks M mit schlichten Noten x gilt:[2]
$f(x)=x+(f(x)-x)$ und speziell $f(x)=x$ für Pausen x
$f(AB)=f(A)f(B)$ für Sätze AB und $f\begin{pmatrix}S_1\\ \vdots\\ S_n\end{pmatrix} = \begin{matrix}f(S_1)\\ \vdots\\ f(S_n)\end{matrix}$ für Sätze $\begin{matrix}S_1\\ \vdots\\ S_n\end{matrix}$
$f^*(f(x)) \coloneqq f(x)+(x-f(x))$ definiert inverse Tonhöhenänderung f^* des Musikstücks $f(M)$ mit $f^*(f(x))=x$.
punktuell isomorph

Mit punktuellen Tonhöhenänderungen sind nicht-intervalltreue Transpositionen ebenfalls genau bestimmbar, jedoch nicht eindeutig wegen eventueller Alterationen. Eindeutig bestimmt sind nur vorzeichentreue Transpositionen:

(13) Als ***n*-Transposition** gilt eine Tonhöhenänderung f laut (12), bei der $f(x)-x$ aus der Stufe n ist. Es gilt: f ist eine intervallstufentreu Transposition laut *Kp*(3); die inverse Abbildung f^* ist eine $-n$-Transposition.[3]
Die vorzeichentreue n-Transposition ist eindeutig bestimmt und wird als τ_n notiert, wobei n kein Intervall angibt, sondern einen Stufe.

---

[2] Für Tonhöhenänderung f und Pausen x gilt stets $f(x)=[x_1,\ldots,x_n]=x$ und nach *Kp*(1) folglich $f(x) = x = x+0 = x+(f(x)-x)$. Nach *Kp*(1) gilt dann $f^*(f(x)) \coloneqq f(x)+(x-f(x)) = f(x)+0 = x$.
Für schlichte Ton-Noten x gilt laut *N*(3)(7)(9) stets $x=[x_1,x_2,x_3,x_4]$ mit Tonhöhe$(x)=x_2$, wegen der Merkmaltreue gilt dann $f(x)=[x_1,\text{Tonhöhe}(f(x)),x_3,x_4]$ und somit
$f(x) = [x_1,x_2+(\text{Tonhöhe}(f(x))-\text{Tonhöhe}(x)),x_3,x_4] = [x_1,x_2+(f(x)-x),x_3,x_4] = x+(f(x)-x)$. Es gilt dann $f^*(f(x)) \coloneqq f(x)+(x-f(x)) = (x+(f(x)-x))+(x-f(x)) = x+(f(x)-x)-(f(x)-x)) = x$.
$f:M\to f(M)$ ist bijektiv, da f alle Noten von M auf alle Noten $f(M)$ eindeutig abbildet, denn laut *N*(7) ist die p-te Note der q-ten Stimme $v_{p[q]}=v_{x_3[x_4]}$ bei M und analog bei $f(M)$. f ist positions- und schichttreu, so dass die Isomorphiebedingungen gelten.

[3] Sei $(f(x)-x)\in$Stufe n und $(f(y)-y)\in$Stufe n; mit *stufengleich* *H*(16) und Def *H*(16) folgt dann [1] Stufe$(f(x)-x)$ = Stufe n = Stufe$(f(y)-y)$. Per *Stufendifferenz/-summe* *H*(16) und [1] folgt Stufe$(f(x)-f(y))$ = Stufe$((f(x)-x)-(f(y)-y)+x-y)$ = Stufe$(f(x)-x)$–Stufe$(f(y)-y)$+Stufe$(x-y)$ = Stufe n – Stufe n +Stufe$(x-y)$ = Stufe$(x-y)$.
Da f bijektiv ist, gibt es x mit $x=f(y)$. Also [2] $f^*(x)-x = f^*(f(y))-f(y) = y-f(y) = -(f(y)-y)$.
Wegen $(f(y)-y)\in$Stufe n gilt Stufe$(f(y)-y)$=Stufe n und –Stufe$(f(y)-y)$=–Stufe n und Stufe$(-(f(y)-y))$=Stufe $-n$ und $-(f(y)-y))\in$Stufe $-n$ und mit [2] $(f^*(x)-x)\in$Stufe $-n$.

Transpositionen werden in schematischen Darstellungen durch die hochgestellte Stufe abgekürzt; schwankende Alterationen werden dabei oft vernachlässigt:

(14) Für Notenmengen A und Stufen n gelten folgende Kurzschreibweisen:
$A^n := \tau_n(A)$ als Repräsentant für andere n-Transpositionen von A
$A' := A^8$ für Oktavtransposition (intervalltreu)
$A^{n'} := A^{n+7}$ für Oktavierungen mit Rechenregeln laut *H*(17)
punktuell isomorph wird auf Transpositionen übertragen durch:
$[AB]^n := A^n B^n$ und $\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix}^n := \begin{bmatrix} S_1^n \\ \vdots \\ S_m^n \end{bmatrix}$

Auch Umkehrungen in den Kontrapunkten (4)ff sind Tonhöhenänderungen. Sie haben nichts zu tun mit Dreiklangsumkehrungen, die Akkordformen permutieren.[Kp(15)] Sie kehren vielmehr die Richtung der Intervallstufen um:

(15) Als **Umkehrung** gilt eine Tonhöhenänderung U von Musikstücken laut (12), bei der $U(x)–U(y)$ aus der Stufe$(y–x)$ ist. In Schemata gilt die Abkürzung $-A := U(A)$ für Notenmengen A des Musikstücks, für das U definiert ist.
Die inverse Tonhöhenänderung U^* mit $U^*(U(x))=x$ ist eine Umkehrung.[4]

Die inverse Umkehrung, die eine Umkehrung rückgängig macht, ist verwandt mit einer Spiegelung, die sich selbst rückgängig macht:

(16) Eine **Spiegelung** ist eine selbstinverse Abbildung f mit $f(f(x))=x$.

Genaue Umkehrungen, die Vicentino im Beispiel (6) nutzte, lassen sich punktuell präzise beschreiben als Spiegelung an einer Tonhöhenachse, und zwar unabhängig vom gewählten Musikstück:

(17) Die Abbildung U_α mit $U_\alpha(x) := x+2(\alpha–\text{Tonhöhe}(x))$ für eine Tonhöhe α gilt als **Umkehrung um die Achse** α.
Eine Tonhöhenänderung U mit $U(x)–U(y) = y–x$ gilt als **genaue Umkehrung**. $\alpha := {}^1/_2(\text{Tonhöhe}(x)+\text{Tonhöhe}(U(x)))$ definiert ihre Achse.
Es gilt: Genaue Umkehrungen U sind Spiegelungen mit $U(U(x))=x$; mit der Definition von α, die unabhängig von der Wahl des Tones x ist, gilt $U=U_\alpha$. U_α ist eine genaue Umkehrung mit Fixtönen $U_\alpha(x)=x \Leftrightarrow \text{Tonhöhe}(x)=\alpha$. Eingeschränkt auf ein Musikstück ist es eine Umkehrung laut (15).[5]

---

4 Da U bijektiv ist, gibt es a, b mit $x=U(a)$ und $y=U(b)$. Also gilt mit (12): [1] $U^*(x)–U^*(y) = U^*(U(a))–U^*(U(b)) = a–b$. Ferner $(U(b)–U(a))\in\text{Stufe}(a–b)$, also $(y–x)\in\text{Stufe}(a–b)$, wegen *stufengleich* *H*(16) gilt dann $\text{Stufe}(y–x)=\text{Stufe}(a–b)$ und $(a–b)\in\text{Stufe}(y–x)$ und mit [1] somit $U^*(x)–U^*(y)\in\text{Stufe}(y–x)$, und U^* ist die inverse Umkehrung.

5 Kürze ab $\mathrm{T}x := \text{Tonhöhe}(x)$. Offenbar $U_\alpha(x)=x \Leftrightarrow 2(\alpha–\mathrm{T}x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{T}x= \alpha$. Ferner gilt $U_\alpha(x)–U_\alpha(y) = \mathrm{T}U_\alpha(x)–\mathrm{T}U_\alpha(y) = \mathrm{T}x+2(\alpha–\mathrm{T}x)–(\mathrm{T}y+2(\alpha–\mathrm{T}y) = \mathrm{T}y–\mathrm{T}x = y–x$. Mit (12) ergibt sich: $U(U(x)) = U(x)+(U(U(x))–U(x)) = U(x)+(x–U(x)) = U^*(U(x)) = x$. Aus $U(x)–U(y)=y–x$ folgt $U(x)–U(y)=\mathrm{T}y–\mathrm{T}x$ und daraus $\mathrm{T}x+\mathrm{T}U(x)=\mathrm{T}y+\mathrm{T}U(y)$, daher ist die Definition von α unabhängig von der Wahl von x. Aus ihr folgt $\mathrm{T}U(x)=2\alpha–\mathrm{T}x$ und damit $U(x) = x+(U(x)–x) = x+(\mathrm{T}U(x)–\mathrm{T}x) = x+(2\alpha–\mathrm{T}x–\mathrm{T}x) = x+2(\alpha–\mathrm{T}x) = U_\alpha(x)$.

Das arithmetische Mittel zweier Tonhöhen ergibt die Achse. Sie kann imaginär sein, wenn die Tonhöhensumme im Stufensystem nicht halbierbar ist; das ist wegen der archaischen Zählung[H(17)] der Fall bei geraden Stufen![6] Nur bei ungeraden Stufen liegt die Achse auf einer Stufe. Die Achsen-Definition (17) passt auch auf ungenaue Umkehrungen eines Musikstücks zum frühesten Ton der ersten Stimme; bei anderen Tönen kann die Achse alteriert sein:

(18)

Umkehrungsbeispiel	Typ	$x \to U(x)$	Tonhöhensumme 2α	Achse α
(4) $\begin{smallmatrix}\mathsf{A}\\ \mathsf{B}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}\mathsf{-B}\\ \mathsf{-A}\end{smallmatrix}$	ungenau	c' → d'	c'+d' ∊ Stufe 16	c'+$^1/_2$Ton imaginär[6]
(5) Schema (21) (5)	ungenau	a' → c	a'+c ∊ Stufe 15	h
(6) A → -A	genau	g → a	g+a ∊ Stufe 10	g+$^1/_2$Ton imaginär[6]

Der Krebs ist eine Spiegelung an einer Zeitachse. Bei ihm wird die Tonfolge rückwärts gelesen. Das erreicht eine neue Berechnung der Notenposition:[N(4)(7)]

(19) Als **Krebs** gilt eine Positionsänderung K eines Musikstücks M, für dessen Noten x gilt: Position($K(x)$)=Länge(M)–Ende(x).

Es gilt $K(AB)=K(B)K(A)$ und $K(l_1...l_n)=l_n...l_1$ für Notenfolgen. Ferner ist der Krebs eine Spiegelung mit $K(K(x))=x$.[7]

Zeitversetzungen durch vorgeschaltete Pausen betten einen Satz in einen Satz mit mehr Noten ein. Das Bild des Satzes ist daher nur ein Teilsatz, der nicht mehr als selbständiger Satz notiert werden kann! In Notenbeispielen (2) (3) (5) (6) ist dieser Teilsatz jedoch direkt sichtbar. Die Position der Noten verändert sich dort, indem die Länge (Gesamtdauer) vorgeschalteter Pausen addiert wird:

(20) Als **Zeitversetzung** um p für eine Dauer $p>0$ gilt eine Positionsänderung $\triangleright p$ mit Position($\triangleright p(x)$)=Position(x)+p.

Offenbar gilt für n-stimmige Musikstücke P, M stets $PM=P\cup\triangleright$Länge(P)(M).

---

6 Die Achsen c'+$^1/_2$Ton bzw. g+$^1/_2$Ton sind in der Notenschrift imaginär und liegen zwischen cis' und des' bzw. gis und as; auf dem zwölfstufig temperierten Klavier dagegen fallen diese Töne zusammen: c'+$^1/_2$Ton=cis'=des' bzw. g+$^1/_2$Ton=gis=as.

7 Sei $l_1...l_n$ die Notenfolge zu einer Stimme von M. $s_i \coloneqq l_{n-i+1}$ erzeugt, da $s_1=l_n$ und $s_n=l_1$ $\boxed{1}$, die gespiegelte Folge $s_1...s_n=l_n...l_1$ mit $l_i=l_{n-(n-i+1)+1}=s_{n-i+1}$ $\boxed{2}$ und $l_{i+1}=l_{n-(n-i)+1}=s_{n-i}$ $\boxed{3}$. Kürze ab D ≔ Dauer, P ≔ Position in $K(M)$, Q ≔ Position in M. Laut N(6) gilt auch Länge(M)=D(l_1)+...+D(l_n) und laut N(4) Ende(l_i)=D(l_1)+...+D(l_i) also per Definition P($K(l_i)$)=D(l_1)+...+D(l_n)–(D(l_1)+...+D(l_i)). Für $i=n$ ist das laut $\boxed{1}$ P($K(l_i)$)=P($K(l_n)$)=0 =P(s_1)=P(s_{n-n+1})=P(s_{n-i+1}) und für $i<n$ P($K(l_i)$)=D(l_{i+1})+...+D(l_n), also mit $\boxed{1}\boxed{3}$ monoton geordnet P($K(l_i)$)=D(s_1)+...+D(s_{n-i}) und somit per N(4) ebenfalls P($K(l_i)$)=P(s_{n-i+1}). Da der Krebs als Positionsänderung ansonsten merkmaltreu ist, gilt für zugehörige Noten in M offenbar mit $\boxed{2}$ $K(l_{i[\mathrm{Q}(l_i)]})=s_{n-i+1[\mathrm{P}(s_{n-i+1})]}$ und somit für die Noten folge $K(l_1...l_n)=s_1...s_n$ $=l_n...l_1$. Durch Zerlegung erhält man offenbar $K(AB)=K(B)K(A)$.
Der Beweis läuft symmetrisch, wenn man stets s und l vertauscht und ebenso Q und P und ergibt $K(s_{i[\mathrm{P}(s_i)]})=l_{n-i+1[\mathrm{Q}(l_{n-i+1})]}$ und somit nach Substitution von i durch n-i+1 die Spiegelung $K(K(l_{i[\mathrm{Q}(l_i)]}))=K(s_{n-i+1[\mathrm{P}(s_{n-i+1})]})=l_{i[\mathrm{Q}(l_i)]}$.

Die schematische Darstellung nutzt wie die Notenschrift die synchrone Zusammensetzung. Sie zerlegt das Musikstück in Teile so groß wie der Einsatzabstand und vernachlässigt eventuelle Bindungen, damit synchrone Teile übereinanderstehen. Pausen im Einsatzabstand werden als Lücke dargestellt. Freie Teile bei Zeitversetzungen werden als `...` notiert. Die Schemata zu Vicentinos doppelten Kontrapunkten mit Zeitversetzung sehen dann so aus:

(21) Beispiel (2): doppelter Kontrapunkt der Zeitversetzung (diminuierte Cantus-firmus-Noten)
+ doppelter Kontrapunkt der Dezime als Parallelkanon:

```
                                        [ABCDEFGHI]^3
ABCDEFGHIJ → abcdefghij              → abcdefghij
abcdefghij   [ABCDEFGHI]^-8            [ABCDEFGHI]^-8
```

Beispiel (3)₁: Oktavkanon = Vereinigung des doppelten Kontrapunkts der Zeitversetzung in der Oktave

```
 [ABCDEFGH]^8..
ABCDEFGH....      ABCDEFGH  →  [ABCDEFGH]^8
abcdefgh....      abcdefgh      abcdefgh
```

Beispiel (5): Umkehrungskanon im doppelten Kontrapunkt der Umkehrung

```
 -A-B    -A-B
a b        a b    + doppelter Kontrapunkt der Zeitversetzung
c d   →    c d      zu den Mittelstimmen
A B        A B
```

Vicentino gab auch **Kompositionsregeln für doppelte Kontrapunkte**, allerdings nicht bei Zeitversetzungen, bei denen nicht alle Stimmen zeitversetzt werden; das zerstört die Synchronizität und erzeugt neue schwer kalkulierbare harmonische Bezüge. Gut berechenbar sind nur synchrone Änderungen der Harmonie, am ehesten solche, bei denen Konsonanzen konsonant bleiben:

(22) Als **synchron** gilt eine Abbildung f zwischen Musikstücken, dessen Töne x und y genau dann simultan sind, wenn auch $f(x)$ und $f(y)$ simultan sind. Solch eine Abbildung gilt als **konsonanztreu**, falls für jede Konsonanz x–y simultaner Töne x und y des Musikstücks auch $f(x)$–$f(y)$ eine Konsonanz ist.

Positions- und dauerntreue Abbildungen sind synchron, insbesondere Tonhöhenänderungen und der Krebs. Intervalltreue synchrone Abbildungen sind konsonanztreu, speziell intervalltreue Transpositionen und der Krebs. Genaue Umkehrungen sind nicht intervalltreu, aber dennoch konsonanztreu.

Beim Krebs, der konsonanztreu ist, ändern sich nur Fortschreitungen. Daher verbot Vicentino beim Krebs dissonante Zwischennoten und Vorhalte.[V37] Seine Lösungsstrategie war also ein total konsonanter Satz (7). Dazu zwingt nur der strenge Kontrapunkt mit unbetonten Durchgängen und Wechselnoten und klassischen Vorhalten,[Kp(6)] denn sie erzeugen im Krebs irreguläre betonte Durchgänge und Wechselnoten beziehungsweise Antizipationen, die erst im Barock üblich wurden.[Kp(28)] Im freieren Stil gibt es daher auch viel interessantere Lösungen: Beispielsweise hat der Krebskanon in Bachs *Musikalischem Opfer* viele reguläre und irreguläre Durchgänge und Wechselnoten und auch klassische und nicht-klassische Vorhalte. Er hat dasselbe Schema wie Vicentinos Krebskanon:

(23) Doppelter Krebs-Kontrapunkt:

C $\rightarrow$ ᗡ mit ᗡ ≔ K(D)
D Ↄ mit Ↄ ≔ K(C)

zugehöriger Krebskanon (7):

Cᗡ
DↃ mit K(Cᗡ)=DↃ

Konsonanztreue Umkehrungen ändern nur die Intervallrichtung, tasten aber den Rhythmus und die Betonung nicht an. Deshalb sind Durchgänge wie in Vicentinos Beispiel (4) legal und ebenso Wechselnoten. Er nannte keine einschränkenden Regeln. Solche sind aber im strengen Stil fällig. Drei Jahre nach Vicentino ergänzte sie sein Kollege Gioseffo Zarlino in dessen *Le Istitutioni harmoniche* 1558 [Z]: Er verlangte beim doppelten Kontrapunkt der Umkehrung erstens, dass alle Synkopen konsonant sind, und zweitens, dass der Tenor zum Sopran keine Quarte bilden darf.[Z232.] Seine Regeln sind etwas zu eng. Die erste Regel schließt klassische Vorhalte nach unten aus, da sie Vorhalte nach oben erzeugen, die er noch nicht erlaubte. Bei erweiterten barocken Fortschreitungen gilt diese Regel nicht mehr; das belegen die Spiegelfugen *Contrapunctus 12* und *Contrapunctus 13* aus Bachs *Kunst der Fuge*. Bach beachtete aber die zweite Regel zur Quarte, die sich allgemeiner formulieren und begründen lässt: Die Umkehrung von Dreiklängen oder Sextakkorden mit in der Oberstimme liegendem Grundton erzeugen Quartsextakkorde,[Kp(15)] daher ist einer der an der Quarte beteiligten Töne wie eine Dissonanz zu behandeln.

Auch intervalltreue Transpositionen sind natürlich konsonanztreu. Sie erzeugen keinen echten doppelten Kontrapunkt, da sie das harmonische Gefüge gar nicht antasten. Dasselbe gilt auch für andere harmonisch triviale Abbildungen, die auf einen ganzen Kontrapunkt angewandt werden:

(24) Stimmtausch, intervalltreue Transposition, Zeitversetzungen, Vergrößerungen und Verkleinerungen[N(10)] sind intervalltreu und somit auch konsonanztreu. Sie bilden Kontrapunkte stets automatisch auf Kontrapunkte ab; das tun auch konsonanztreue Transpositionen, die nicht intervalltreu sind.

Bei Stimmen ohne Stimmkreuzung kann laut Zarlino ihr Abstand durch Oktavierung der Oberstimme vergrößert werden.[Z230f] Denn auch das ist eine konsonanztreue Abbildung, die keine neue Harmonie und keinen echten doppelten Kontrapunkt erzeugt. Bei Stimmkreuzungen versagt sie allerdings. Man unterscheidet beide Fälle mit Intervallen simultaner Töne:

(25) Gilt für simultane Töne a aus A und b aus B stets $a{-}b \geqslant 0$, so liegt A **über** B und B **unter** A. A **kreuzt** B, falls weder A über B noch B über A liegt.

Es gilt: Ist $\frac{A}{B}$ ein Kontrapunkt mit A über B, so ist auch $\frac{A^8}{B}$ ein Kontrapunkt mit A^8 über B. Solche partiellen Oktavierungen sind mehrfach anwendbar.

Andere partielle Transpositionen können gewisse Konsonanzen zerstören. Vicentino transponierte einmal die Oberstimme nach unten, ein anderes Mal die Unterstimme nach oben. Beide Fälle laufen prinzipiell auf denselben Kontrapunkt-Typ hinaus, wie eine Transposition der abgebildeten Stimmpaare zeigt:

(26) Beispiel (1) $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}B\\A^{-10}\end{matrix}$ Beispiel $(2)_{2+3}$ $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}B^{10}\\A\end{matrix}=\begin{bmatrix}B\\A^{-10}\end{bmatrix}^{10}$ Beispiel $(8)_1$ $\begin{matrix}A\\B\\C\\D\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}B\\C\\A^{-8}\\D\end{matrix}$ Beispiel $(8)_2$ $\begin{matrix}A\\B\\C\\D\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}C^{8}\\A\\B\\D\end{matrix}$ $\begin{matrix}C^{8}\\A\end{matrix}=\begin{bmatrix}C\\A^{-8}\end{bmatrix}^{8}$

(1) $(8)_2$ haben keine Stimmkreuzung, $(2)_{2+3}$ $(8)_1$ haben Stimmkreuzungen.

Zur Präzisierung solcher doppelten Kontrapunkte genügt der einfachste Fall; aus ihm lassen sich deren Varianten ohne Schwierigkeiten durch Transposition errechnen:

(27) Als **doppelter Kontrapunkt der Stufe *n*** für $n>1$ gilt ein zweistimmiger Kontrapunkt $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}$, zu dem es einen Kontrapunkt $\begin{matrix}B^n\\A\end{matrix}$ gibt.

Zwischen gekreuzten Stimmen gibt es positive und negative Intervalle. Der negative Kreuzungsbereich ist in folgender Skala grau unterlegt. Konsonanzen mit verbotenen Parallelen sind mit $_{\neq}$ markiert. Rot gefärbt sind Dissonanzen und Ausrufezeichen, das die manchmal erforderliche Quart-Dissonanzbehandlung anmahnt:

(28)

a–b	-6	$-5_{\neq}$	-4**!**	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	4**!**	$5_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**9** **2'**	10 3'	11**!** 4'**!**	$12_{\neq}$ $5'_{\neq}$	13 6'	**14** **7'**	$15_{\neq}$ $8'_{\neq}$

Bei doppelten Kontrapunkten ist eine zweite Skala in umgekehrter Richtung nötig für die Konsonanz- und Dissonanzverhältnisse nach dem Stimmtausch mit partieller Transposition. Sie überlagern sich dann so, dass die Intervallstufen und deren Bilder übereinander stehen. Solche gegenläufige Skalen führte Berardi 1681 in der schlichten Form $\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&5&4&3&2&1\end{matrix}$ ein.[B147]

Ausgedehnt auf Stimmkreuzungen mit ergänzten Daten für Parallelen und Dissonanzen sehen die Skalen beim doppelten Kontrapunkt der Oktave so aus:

(29)

	doppelter Kontrapunkt der Oktave: Intervallstufen																			
1 *a–b*	-6	$-5_{\neq}$	-4**!**	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	4**!**	$5_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**9**	10	11**!**	$12_{\neq}$	13	**14**	$15_{\neq}$
2 b^8–*a*	13	$12_{\neq}$	11**!**	10	**9**	$8_{\neq}$	**7**	6	$5_{\neq}$	4**!**	3	**2**	1	**-2**	-3	-4**!**	$-5_{\neq}$	-6	**-7**	$-8_{\neq}$
1+2	-6	$-5_{\neq}$	-4**!**	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	4**!**$_{\neq}$	5**!**$_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**2'**	3'	4'**!**	$5'_{\neq}$	6'	**7'**	$8'_{\neq}$

Im Kreuzungsbereich passiert hier nichts Unvorhergesehenes. Im ungekreuzten Bereich dagegen sind zwei kleine Regeln zu beachten: keine Quartparallelen, was Vicentino nicht bemerkte, und dissonant geführte Quinten, wenn die Quarte in der Auflösung zum Basston wird. Vicentino verschärfte diese Regel zum Verbot, keine Quinte zu setzen.[V38] Das bezog er auf die reine Zweistimmigkeit, da hier eine Quarte als falscher Bass entstehen kann. Im vierstimmigen Satz mit freiem Bass beachtete er selbst dieses Verbot nicht. Es ist aber auch für den zweistimmigen Satz viel zu grob: Denn wenn Quinten wie Dissonanzen behandelt werden, erzeugen sie legitime wie Dissonanzen behandelte Quarten. Tatsächlich hat man also mehr Freiheiten beim Komponieren.

Beim doppelten Kontrapunkt der Dezime werden die gegenläufigen Skalen etwas verschoben und sehen so aus:

(30)

	doppelter Kontrapunkt der Dezime: Intervallstufen																			
$\boxed{1}$ *a*–*b*	-6	$-5_{\neq}$	-4**!**	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	4**!**	$5_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**9**	10	11**!**	$12_{\neq}$	13	**14**	$15_{\neq}$
$\boxed{2}$ b^{10}–a	$15_{\neq}$	**14**	13	$12_{\neq}$	11**!**	10	**9**	$8_{\neq}$	**7**	6	$5_{\neq}$	4**!**	3	**2**	$1_{\neq}$	**-2**	-3	-4**!**	$-5_{\neq}$	-6
$\boxed{1}$+$\boxed{2}$	$-6_{\neq}$	$\mathbf{-5_{\neq}}$	-4**!**	$-3_{\neq}$	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	$3_{\neq}$	**4**	$5_{\neq}$	$6_{\neq}$	**7**	$8_{\neq}$	**2'**	$3'_{\neq}$	**4'**	$5'_{\neq}$	6'**!**	**7'**	$8'_{\neq}$

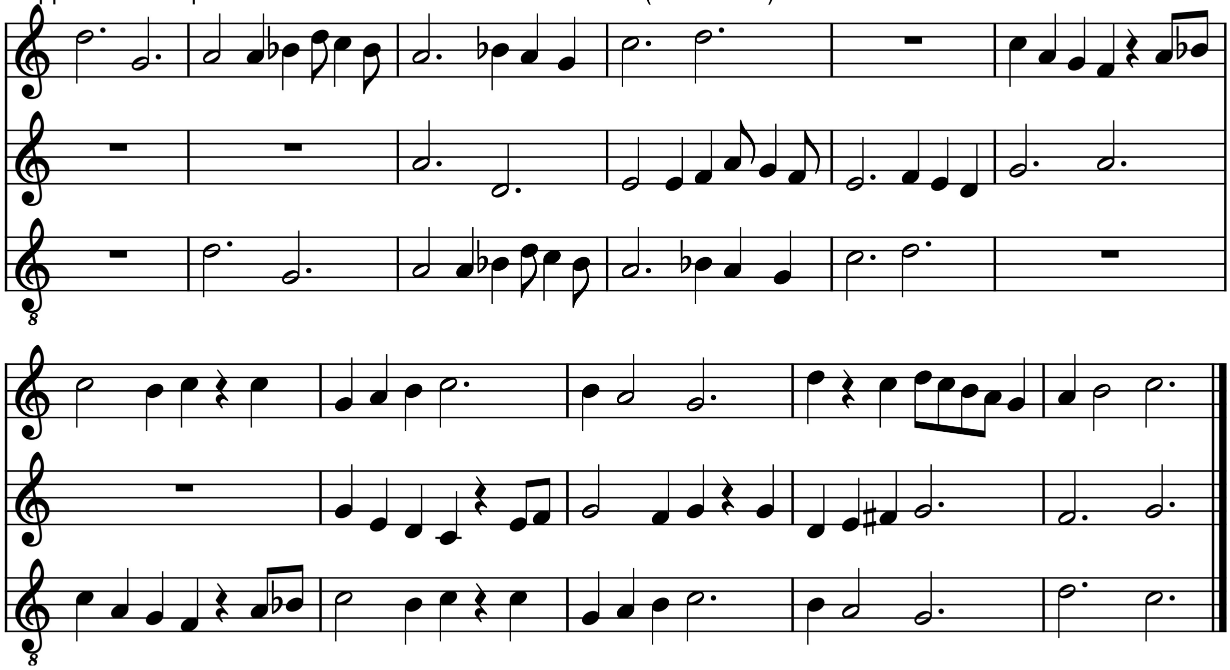
Vicentinos Verbot von Terz- und Sextparallelen,[V34] da sie Oktav- oder Quintparallelen erzeugen, ist ablesbar im ungekreuzten Bereich der Skala [1 bis 10]. Die Dissonanzbehandlung der Quarte, die hier offenbar notwendig ist, besprach er nicht. Das versäumte auch Zarlino, obwohl er stets genauere Kompositionsregeln angab:[Z231] Er kalkulierte den Kreuzungsbereich bis zur Unterterz oder Duodezime ein, denn er sah, dass es darüber hinaus kompliziert und unregelmäßig wird, weil die Tredezime (oktavierte Sexte) in der zweiten Auflösung kritisch ist. Auch die Unterquinte wäre keine Konsonanz. Im eigenen Beispiel nutzte er eine Dezime+Oktave-Transposition, also die partielle Oktavierung (25), die den problemlosen Bewegungsraum der Melodie (fett umrahmt) um eine Oktave vergrößert. Ausdrücklich erwähnte er auch die dreistimmige Erweiterung durch eine Dezimparallele, die Vicentino in seinem zweiten Beispiel (2)$_3$ nur vage andeutete. Weitere Regeln Zarlinos sind nicht zwingend: Nur konsonante Synkopen zu benutzen,[Z231] was dissonante Vorhalte ausschließt, ist hier nicht notwendig.

Vicentino diskutierte doppelte Kontrapunkte anderer Stufen nicht. Allgemein tat dies erst Marpurg 1754,[M 161-192] also nach Bachs Tod. Aber doppelte Kontrapunkte der None oder Septime u.a., die er breit behandelte, spielten in der Musikpraxis niemals eine Rolle. Nur einer, den Vicentino nicht erwähnte, war bedeutsam: ein **doppelter Kontrapunkt der Duodezime**. Zarlino nannte ihn an erster Stelle, und zwar mit einer intervalltreuen Transposition.[Z229] Er schloss den Kreuzungsbereich aus, da sich darüber hinaus Dissonanzen häufen. Ausdrücklich verbot er konsonante Sexten. Beides deckt sich mit den gegenläufigen Skalen für diesen doppelten Kontrapunkt:

(31)

	doppelter Kontrapunkt der Duodezime: Intervallstufen																		
$\boxed{1}$ *a*–*b*	$-5_{\neq}$	-4**!**	-3	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	4**!**	$5_{\neq}$	6	**7**	$8_{\neq}$	**9**	10	11**!**	$12_{\neq}$	13	**14**	$15_{\neq}$
$\boxed{2}$ b^{12}–a	**16**	15	**14**	13	$12_{\neq}$	11**!**	10	**9**	$8_{\neq}$	**7**	6	$5_{\neq}$	4**!**	3	**2**	$1_{\neq}$	**-2**	-3	-4
$\boxed{1}$+$\boxed{2}$	**-5**	-4**!**	**-3**	**-2**	$1_{\neq}$	**2**	3	**4**	$5_{\neq}$	**6**	**7**	$8_{\neq}$	**2'**	3'	**4'**	$5'_{\neq}$	**6'**	**7'**	$8'_{\neq}$

Wieder erlaubte er die partielle Oktavierung (25) als Duodezime+Oktave-Transposition. Selbstverständlich ist auch eine nicht-intervalltreue Duodezim-Transposition möglich. Das älteste bekannte Beispiel ist ein Kanon des 14. Jahrhunderts, bei dem die um einen Takt versetzten Stimmen 2+3 zu 1+3 im doppelten Kontrapunkt der Duodezime stehen:

(32) Doppelter Kontrapunkt der Duodezime: Francesco Landini (1325-1397): Ritornello aus: Deh Dimmi tu

Offenbar galten im 14. Jahrhundert die Parallelenverbote noch nicht: In Takt 3+8 stehen Oktavparallelen, die in Takt 4+9 zu Quintparallelen werden. Die übrigen Kontrapunktregeln erfüllte Landini jedoch, wie man leicht nachprüft.

Kunstvollere Anwendungen dieser kontrapunktischen Techniken gibt es wieder in Bachs *Kunst der Fuge*: *Contrapunctus 16+17* sind Kanons im doppelten Kontrapunkt der Dezime oder Duodezime. *Contrapunctus 9* ist eine Doppelfuge mit zwei Themen im doppelten Kontrapunkt der Duodezime, *Contrapunctus 10* eine Doppelfuge mit zwei Themen im doppelten Kontrapunkt der Dezime, die in Takt 75, 85, 103, 115 in dreistimmig Parallelkanons geführt werden.

Zarlino kombinierte die drei Doppelkontrapunkte der Duodezime, Dezime und genauen Umkehrung in einem mehrfachen Kontrapunkt ohne Parallelen, ohne Vorhalte und ohne konsonante Sexten und nannte auch dreistimmige Parallelkanon-Auflösungen;[Z233] vierstimmige Auflösungen, die ebenfalls möglich sind, übersah er:

(33)					B^{10}	A^{6}	B^{8}	$-A^{10}$	*theoretisch auch möglich u.a.:*	B^{8}	B^{10}	$-A^{10}$
	A	B^{8}	B^{8}	-B	A	B^{8}	A^{-3}	-B		A^{6}	A	-B
	B	A^{-5}	A^{-10}	-A	B	A^{-5}	A^{-10}	-A		B^{6}	B	-A
										A^{-12}	A^{-10}	$-B^{-10}$

Eine Anwendung kombinierter Kontrapunkte ist wieder bei Bach zu finden: Im *Wohltemperierten Klavier* II baute er die *Fuge 16 g-moll* auf einem doppelten Kontrapunkt der Duodezime und Dezime auf und wandte auch drei- und vierstimmige Auflösungen mit Parallelen an.

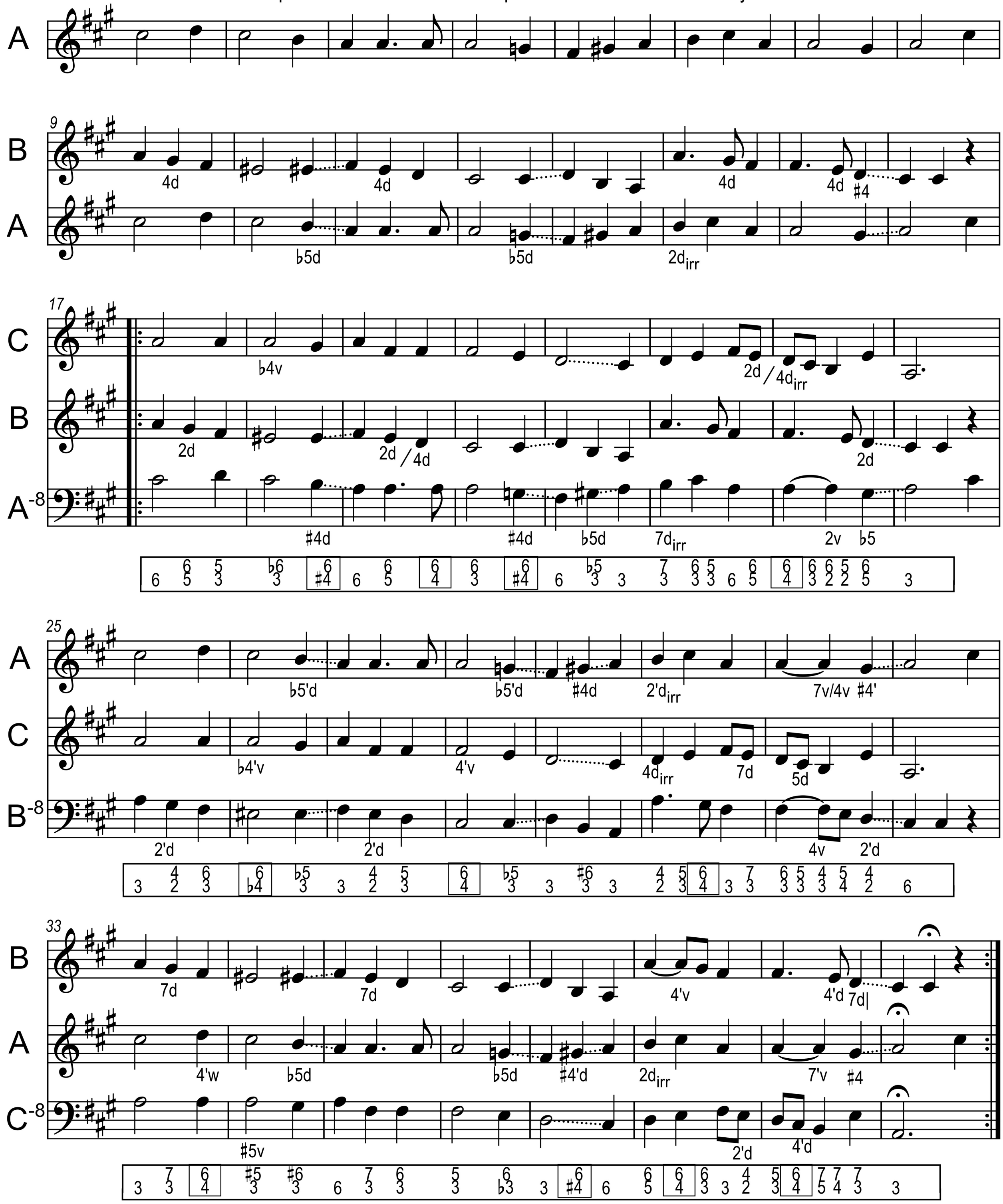
Der Kontrapunkt auf dem Titel vereinigt die letzten beiden vierstimmigen Auflösungen (33) in einem symmetrischen achtfachen Kontrapunkt, erzeugt aus einem Tetrachord durch Grundgestalt, Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung. Er nutzt also die Spiegelungen Vicentinos und generiert Dezimparallelen. Die Symmetrie im Titelbild ist optisch direkt erkennbar: Jedes Notensystem stellt eine Untergruppe mit zwei Spiegelachsen dar: dem Taktstrich und der Tonhöhe a beziehungsweise cis‘. Beide Untergruppen sind spiegelsymmetrisch bezüglich der imaginären Achse e+$^1/_2$Ton und bilden zugleich Dezimparallelen. Die Krebs-Symmetrie generiert insgesamt eine Kadenz, bei der ein Dominant-septnonakkord aufgebaut und wieder aufgelöst wird.

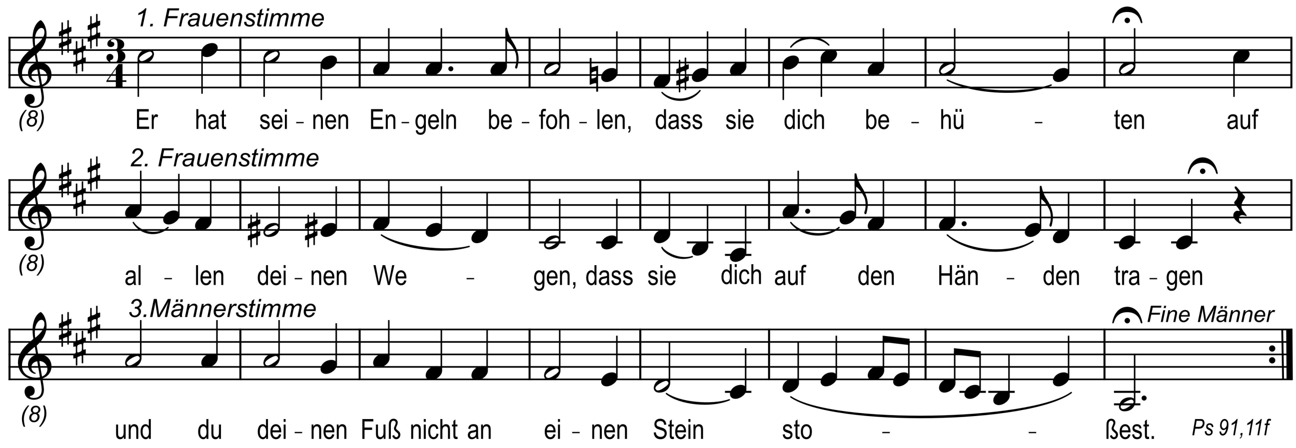
Bei Zarlino fehlt von Vicentinos doppelten Kontrapunkten sowohl der Krebs als auch der doppelte Kontrapunkt der Oktave. Letzter ist in mehrstimmigen Sätzen häufig und trivial, weil nur Quartparallelen zu meiden sind. Kompliziert wird erst ein mehrstimmiger Satz für gemischte vertauschbare Stimmen, also ein **mehrfacher Kontrapunkt der Oktave**. Da hier jede Stimme im Bass erscheinen kann, verursachen Quinten der Dreiklänge chronische Probleme. Regelrecht komponierte Beispiele dazu findet man in der Literatur nicht, nicht einmal bei Bach: Seine vielen Permutationsfugen, die angeblich im drei- bis fünffachen Kontrapunkt der Oktave komponiert sind, halten einer genauen Analyse nicht stand: Für ihn war die Permutationsfuge kein komplexes Kompositionsverfahren, sondern im Gegenteil ein Schnellverfahren; oft fügte er einen Instrumentalbass hinzu oder änderte Stimmen an Problemstellen ab.[SN111f] Ein strenges Permutationsschema ohne Füllstimmen hat nur seine dreistimmige *Sinfonia f-moll* für Klavier. Doch gerade in dieser echten Permutationsfuge ließ er mehrere ‚falsche‘ Quarten einfach stehen. Sie fallen allerdings wegen der herben chromatischen Harmonik kaum auf.

Auf zyklischen Permutationen bauen auch übliche Zirkelkanons auf, die es in Hülle und Fülle gibt, auch von prominenten Komponisten. Aber sie sind so gut wie immer für gleiche Stimmen komponiert, da sie meist für gesellige Anlässe geschrieben sind. Daher wandten Komponisten auch hier keine komplexe Kontrapunkttechnik an. Sie wäre erst erforderlich bei einem Zirkelkanon für mehrstimmigen Chor, wie am Schema eines Kanons für zwei Frauenstimmen und eine Männerstimme erkennbar ist:

(34) $\begin{array}{cc|ccc|} A & B & C & A & B \\ & A & :B & C & A: \\ & & A^{-8} & B^{-8} & C^{-8} \end{array}$ *dreifacher Kontrapunkt* $\begin{array}{ccc} B & B & B \\ A & A^{-8} & A^{8} \end{array} = \begin{bmatrix} A \\ B^{-8} \end{bmatrix}$ *analog für* $\begin{array}{c} C \\ B \end{array}$ *und* $\begin{array}{c} C \\ A \end{array}$

Solch ein Kanon ist mir bei der wissenschaftlichen Recherche nie begegnet. Das war der Anlass zur Komposition eines solchen Kanons im strengen alten Stil. Bei ihm ist ein Korrektheitstest durchführbar, der Dissonanzen eliminiert, und zwar separat für jedes Stimmpaar, wie es die Kontrapunktdefinition verlangt:[Kp(17)(26)] Alle Dissonanzen und Quarten sind korrekt als Durchgang (d), Wechselnote (w) und Vorhalt (v) geführt. Sie sind vermerkt in den Noten, wobei nebeneinanderstehende Dissonanzen sich jeweils auf zweierlei korrekte Stimmpaare beziehen. Auch verminderte Quinten (♭5) und übermäßige Quarten (♯4), die schon im alten Kontrapunkt als fast konsonant galten,[Kp(6)] lösen sich korrekt auf, was punktierte Linien anzeigen:

Kanon im dreifachen Kontrapunkt der Oktave mit kontrapunktisch-harmonischer Analyse

Der vollständig bezifferte Bass zeigt, dass auch im dreifachen Kontrapunkt der Oktave eine anspruchsvolle Harmonik mit vielen Dreiklängen, Septakkorden und Quartsextakkorden gestaltet werden kann. Dieser komplexe Kanon wurde schon in der KANONKUNST erwähnt mit dem zugehörigen Text:

Kanon im dreifachen Kontrapunkt der Oktave Wilfried Neumaier 1977

Literatur

[*K*] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024.

[*MM*] Neumaier, W.: *Musik-Mathematik kurz gefasst*, Heft 1-5:
[*H*] *Unser harmonisches Tonsystem*, 2025
[*N*] *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025.
[*Kp*] *Kontrapunkt oder Komposition*, 2025.
[*Dp*] *Doppelter Kontrapunkt*, 2026.
[*KT*] *Kanontechnik*, 2026.

Download von [*K*][*MM*]: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft

[*SN*] Neumaier, Sabine: *Der doppelte Kontrapunkt in den Permutationsfugen von Johann Sebastian Bach*, Tübingen 1974 (Musikwissenschaftlichen Institut).

Historische Quellen

[*B*] Berardi, Angelo: *Ragionamenti Musicali*, Bologna 1681. https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10598256?page=150,151

[*M*] Marpurg, Friedrich Wilhelm: *Abhandlung über die Fuge*, Berlin 1754. https://digital.staatsbibliothek-berlin.de/werkansicht?PPN=PPN866422935&view=overview-toc&PHYSID=PHYS_0190&DMDID=DMDLOG_0001

[*V*] Vicentino, Nicola: *L'antica musica ridotta alla moderna prattica*, Rom 1555, Buch IV, zitiert nach Kapiteln. https://imslp.org/index.php?title=L%27antica_musica_ridotta_alla_moderna_prattica_(Vicentino,_Nicola)&oldid=3307859

[*Z*] Zarlino, Gioseffo: *Le Istitutioni harmoniche*, 1558, Teil III, zitiert nach Seitenzahlen. https://docnum.unistra.fr/digital/collection/coll10/id/1052

Titelbild: Achtfacher Kontrapunkt durch Vicentino-Spiegelungen erzeugt. Optisch erkennbare Symmetrie: Diedergruppe D_2 oder Kleinsche Vierergruppe; jedes Notensystem für sich hat ebenfalls diese Symmetrie.

***

Update April 2026