KANONTECHNIK



Heft 5
Wilfried Neumaier
Oktober 2026

Musik-Mathematik kurz gefasst

Seit der Kanon vor gut siebenhundert Jahren erfunden wurde, hat er immer wieder Menschen begeistert und zum Komponieren angeregt. Die Entwicklung dieser Musizierform wurde in der KANONKUNST [*K*] dargestellt mit ♫-Links zu Hörbeispielen und separat edierten Notenbeispielen. Dort ging es um die vielfältigen Kanon-Formen, die Komponisten im Lauf der Zeit verwirklichten. Mathematisch sind es lauter Symmetriestrukturen, die dort anschaulich schematisiert wurden, so dass die Mathematik im Hintergrund blieb. Hier wird die Terminologie und Technik präzisiert mit mathematischen Grundlagen aus früheren Heften, vor allem aus dem Heft DOPPELTER KONTRAPUNKT [*Dp*], das eine Vorstufe zur Kanontechnik behandelt.

Zunächst geht es um den **Kanonbegriff** und um **Kanontypen**. Ursprünglich ist ein Kanon die Vorschrift, nach der aus einer Stimme eine zweite abzuleiten ist. Zur präzisen Kanonvorschrift gehört meist ein Stimmtausch, der Stimmen umnummeriert, eine Zeitversetzung und weitere musikalische Abbildungen, die mit dem Operator ∘ hintereinander ausgeführt werden.

(1) Als **Kanonvorschrift** gilt ein Paar (D,k) mit einer Abbildung k, die die Notenmenge D auf die Notenmenge $k(D)$ abbildet; D gilt als **Dux** und $k(D)$ als **Comes** und beide als **Parts** der Kanonvorschrift. In Kanonvorschriften werden Zeitversetzungen $\triangleright p$ ohne Operator als Dauer p notiert und bei einer Hintereinanderausführung auch indiziert $k_p := k\circ\triangleright p$.[Dp(20)]

(2) Als **Kanon** gilt eine Folge von Kanonvorschriften, wobei Dux_n und Comes_n den Dux und Comes der n-ten Kanonvorschrift bezeichnen.

Mehrfache Kanons sind meist rekursiv und oft sogar periodisch. Bei ihnen sind abgekürzte Kanonvorschriften möglich, indem ein regulärer Stimmtausch und Wiederholungen nicht notiert werden:

(3) Als ***n*-facher Kanon** gilt ein Kanon mit n Parts für $n\geq 2$.
Für n-fache **rekursive Kanons** gelten folgende Abkürzungen:

(a) $D[k_1|...|k_{n-1}]\pi := (D,k_1\circ\pi),(\text{Comes}_1,k_2\circ\pi),...,(\text{Comes}_{n-2},k_{n-1}\circ\pi)$ mit Stimmtausch π,[Dp(9)]

(b) $D[k]\pi^n := D[k_1|...|k_{n-1}]\pi$ für konstante $k=k_1=...=k_{n-1}$,

(c) $D[k_1|...|k_l]\pi^n := D[k_1|...|k_{n-1}]\pi$ für wiederholte $k_{s+l} := k_s$ mit $l<(s+l)<n$,

(d) $D[k_1|...|k_{n-1}]_p\pi := D[k_1\circ\triangleright p|...|k_{n-1}\circ\triangleright p]\pi$ für **periodische Kanons** mit konstanter Zeitversetzung,

(e) $X := X\pi_{s\times n}$ und $X^n := X\pi_{s\times n}{}^n$ für Kanons X und X^n laut (a) (b) (c) (d) mit s-stimmigem Dux und regulärem Stimmtausch $\pi_{s\times n} := (s+1,...,s\cdot n,1,...,s)$.

Ein Kanon im definierten Sinn ist noch kein Musikstück, sondern erzeugt ein solches. Musiker können es manchmal aus den Dux-Stimmen vom Blatt singen. Oft ist jedoch eine Kanonauflösung mit ausgeschriebenen Comes-Stimmen gegeben, eingebettet in einen Kanonsatz, der früher als Fuga bezeichnet wurde. Später sagte man zur Fuga kurz auch Kanon. Diese lässige doppeldeutige Sprachpraxis stört auf der präzisen Sprachebene, wo beides zu trennen ist:

(4) Als **Auflösung** des Kanons κ gilt die Vereinigung aller Parts des Kanons. Als **Kanonsatz** zu κ gilt ein Satz, der die Auflösung des Kanons κ umfasst; enthält er keine anderen Töne als diese Auflösung, dann **erzeugt** ihn κ, andernfalls gilt er als **erweiterter** Kanonsatz zu κ.
κ ist **Teilkanon** von λ, falls die Auflösung des Kanons κ eine Teilmenge der Auflösung von λ ist.
Für Kanons κ und λ gilt: κ ist **äquivalent** zu λ, falls die Auflösungen von κ und λ identisch sind bis auf Stimmtausch. In Beispielen werden Auflösungen oft durch einen Stimmtausch passend zur Stimmlage permutiert.

Zu periodischen Kanons passen Kanonsätze, die periodisch zerlegt werden in gleichlange Blöcke aus gleichlangen Satzbausteinen mit Buchstabensymbolen und Pausen als gleichlange Lücken:

(5) Als **periodischer Satz** mit **Periode** Π gilt ein Satz, der harmonisch äquivalent ist zu einem Satz $\mathtt{B}_1 \ldots \mathtt{B}_m$ mit **Blöcken** $\mathtt{B}_x$ der Länge($\mathtt{B}_x$)=Π und dem **Anfang**($\mathtt{B}_x$) $:= (x\text{-}1)\cdot\Pi$ für $1 \leqslant x \leqslant m$. Länge und Anfang übertragen sich auf die Stimmen der Blöcke. Die Periode Π ist in Beispielen stets ablesbar.
N.B.: Ein harmonisch äquivalenter Satz laut *Kp*(9) teilt Noten, die über den Blockanfang gebunden sind (Synkopen).

Der älteste bekannte Kanon ist der *Sommerkanon* aus dem 13. Jahrhundert, ein vierstimmiger periodischer Zirkelkanon (rota) über einem zweistimmigen Ostinato (pes).[K2] Seine Auflösung wird in einen sechsstimmigen periodischen Kanonsatz in anschaulicher Blockform eingebettet: ♫

(6) rota *sumer is icumen in*:
$|{:}\mathtt{ABCDEFGHIJKL}{:}|[\Pi]^4$
laut (3) periodisch mit $\pi_{1\times4}$=(2,3,4,1)
laut (5) Π=Länge(A)
pes: $\begin{smallmatrix}\mathtt{a}&\mathtt{b}\\\mathtt{b}&\mathtt{a}\end{smallmatrix}[2\Pi](1,2)^{14}$ oder $\begin{smallmatrix}\mathtt{a}\\\mathtt{b}\end{smallmatrix}[\Pi](2,1)^{28}$

```
ABCD|EFGHIJKLABCD|
 ABC|DEFGHIJKLABC|
  AB|CDEFGHIJKLAB|
   A|BCDEFGHIJKLA|
abab ab|ababababab|
 baba|bababababa|
```

Zirkelkanons für eine gesellige Runde gibt es in Hülle und Fülle. Sie lassen sich im Kreis singen und notieren wie auf dem Titelbild. Oft haben sie eine permutierbare Blockform und werden beim Musizieren ostinat wiederholt:

(7) Als **Ostinato** gilt ein Satz der Form $|{:}B{:}|^{v\times}$ für $v \geqslant 2$, speziell $|{:}B{:}|$ für v=2.[N(6)]
Als **Zirkelkanon** gilt ein Kanon, bei dem jeder Dux ein Ostinato ist.

(8) Der Zirkelkanon $|{:}\mathtt{B}_1 \ldots \mathtt{B}_n{:}|[\Pi]^n$ ist äquivalent zu $\mathtt{B}_1 \ldots \mathtt{B}_n[\Pi]^{2n}$ und ein Teilkanon des Zirkelkanons $|{:}\mathtt{B}_1 \ldots \mathtt{B}_n{:}|^{v\times}[\Pi]^n$ äquivalent zu $\mathtt{B}_1 \ldots \mathtt{B}_n[\Pi]^{n\cdot v}$ mit $v \geqslant 2$.

(9) $|{:}\mathtt{ABC}{:}|[\Pi]^3$ ist äquivalent zu $\mathtt{ABC}[\Pi]^6$ und hat folgende Kanonsätze:

```
|:ABC:|          ABCABC                 AB|CAB|
 |:ABC:|   =     ABCABC    Teil von     A|:BCA:|
  |:ABC:|         ABCABC                 |ABC|
```

Jedes Ostinato wird durch einen Linearkanon erzeugt, der die Parts aneinanderreiht ohne Stimmtausch; deshalb steht in der zugehörigen Kanonformel eine wirkungslose Permutation, die nicht notiert werden muss:

(10) Als **linear** oder **Linearkanon** gilt ein Kanon mit lauter schichttreuen Abbildungen.[N(7)(9)] Der Stimmtausch (1,...*n*) ist schichttreu und es gilt (1,...*n*)=id. D[k_1|...|k_{n-1}]$_{linear}{}^{v}$ ≔ D[k_1|...|k_{n-1}]$_{\Pi}{}^{v}$(1,...*n*) mit Π=Länge(D) definiert einen periodischen Linearkanon. D[0]$_{linear}{}^{v}$ erzeugt das Ostinato |:D:$|^{v\times}$.

Das Sommerkanon-Ostinato hat zweistimmige Parts und ist daher ein primitiver Doppelkanon. Er gehört zu einem Kanontyp, den Komponisten des 15. Jahrhunderts auf mehr Stimmen ausdehnten:

(11) Ein Kanon mit zweistimmigen Parts gilt als **Doppelkanon**, mit dreistimmigen Parts als **Tripelkanon**, mit vierstimmigen Parts als **Quadrupelkanon**.

Ein damals schon berühmtes Beispiel eines neunfachen Quadrupelkanons ist die 36-stimmige Motette *Deo gratia* von Johannes Ockeghem [*JO*]:

(12) *Deo gratia*[3━]^9 mit vierstimmigem Dux ist laut (3) periodisch und regulär mit $\pi_{4\times9}$=(5,...,36,1,2,3,4). Eine nach Stimmlagen sortierte Blocksatz-Partitur erzeugt der Stimmtausch (1, 1+9, 1+18, 1+27, ..., 9, 9+9, 9+18, 9+27).[JO15]

Aus Kanons mit Zeitversetzungen entwickelte sich eine Vielfalt von Kanonformen mit anderen Abbildungen. Machaut fing im 14. Jahrhundert damit an und nutzte als Spiegelung an einer Zeitachse: den Krebs. Die Spiegelung an einer Tonhöhenachse, die Umkehrung, kam in der Renaissance dazu bei Adrian Willaert und seinen Schülern Nicola Vicentino und Gioseffo Zarlino.[K(23)-(25)] Im Blocksatz werden abgewandelte Buchstaben verwendet: für den Krebs von B, C, D gespiegelte Buchstaben ꟾ, Ↄ, ᗡ und für eine Umkehrung von A ein Minuszeichen -A. Der Krebs *K* und die Umkehrung U_α um die Tonhöhenachse α wurden bereits präzisiert.[Dp(19)(17)] Damit ergeben sich präzise Kanonvorschriften für die historischen **Krebskanons** und **Umkehrungskanons**:

(13) Krebskanon in Machauts Rondeau *Ma fin est mon commencement*:[K(8)]

B
C [*K*]$_{\Pi}$(2,1,3)^4
D

B Ↄ B Ↄ
C ꟾ C ꟾ
D ᗡ D ᗡ

Teilstück in

B Ↄ B B B Ↄ B Ↄ
C ꟾ C C C ꟾ C ꟾ
D ᗡ D D D ᗡ D ᗡ

(14) Umkehrungskanon von Vicentino:[Dp(4) mit Noten]
A B C D [U_α]$_{\Pi}$ mit Tonhöhenachse α=g+$^1/_2$Ton

A B C D
-A-B-C-D

(15) Umkehrungsdoppelkanon von Zarlino:[Kp(24) mit Noten]

A B C D E F
a b c d e f
[$U_{d'}$]$_{\Pi}$(4,3,2,1)

A B C D E F
a b c d e f
-a-b-c-d-e-f
-A-B-C-D-E-F

(16) Umkehrungsdoppelzirkelkanon von Zarlino:[R2 mit Noten]

|:A B:|
a b
[$U_{d'}$]$_{\Pi}$(4,3,2,1)

A B A B
a b a b
-a-b-a-b
-A-B-A-B

Im 15. Jahrhundert entstanden die ersten Intervallkanons. Komponisten setzten dabei oft nur andere Schlüssel vor die Noten; das ergibt eine vorzeichentreue Transposition τ_n um die Stufe *n*.[Dp(13)] Dabei ist A^n das Bild des Satzes *A* und $A'=A^8$ und $\underline{A}=A^{-8}$.[Dp(14)] Die Stufe *n* kürzt in Kanons vorzeichentreue Transpositionen ab. Transpositionen mit alterierten Tönen werden durch $\tau_{n\sharp}$ genähert.[Dp(13)] Oktavierungen wie 8, 8', -8, -8' sind intervalltreu, andere vorzeichentreue Trans-

positionen nicht. Bei intervalltreuen τ_i ist das exakte Intervall i anzugeben, etwa die reine Quinte ≔ Q, reine Quarte ≔ O-Q oder der Ganzton Ton ≔ 2Q-O.[H(18)] Der Kanontyp und historische Beispiele lassen sich damit präzisieren:

(17) Als **Intervallkanon** gilt ein rekursiver Kanon mit Transpositionen als Abbildungen. Er gilt als ***x*-Kanon**, falls er periodisch ist und nur Transpositionen um x oder eine Oktavierung von x nutzt.[Dp(11)(13)] Transpositionen τ_x werden im Kanon ohne Operator als x notiert.

Der älteste bekannte Intervallkanon wurde als Notenbeispiel für einen doppelten Kontrapunkt der Duodezime schon früher zitiert:[Dp(37)]

(18) Ritornell-Kanon in *Meh Dimmi tu* von Landini:[K(9)] A B C D E F G H[-8|5♯]$_\Pi$

A B C D E F G H . . .
A^5 B^5 C^5 D^5 E^5 F^5 G^5 H^5 .
A B C D E F G H . .

In dreierlei Schlüsseln notierte Ciconia seinen dreifachen Quintkanon:

(19) Dreifacher Quint-Zirkelkanon *Quod jactatur* von Ciconia:[K(10)] |:ABCDEFG:|[5]$_\Pi{}^3$

|:A^9 B^9 C^9 D^9 E^9 F^9 G^9:|
|:A^5 B^5 C^5 D^5 E^5 F^5 G^5:|
|:A B C D E F G:|

Mehrfache reine Quint- oder Quartkanons zwingen zur Modulation: Die Stimmen wandern durch die Tonarten (per tonos). Sie wiederholen sich nicht im Kreis, sondern sequenzartig auf einer Spirale:

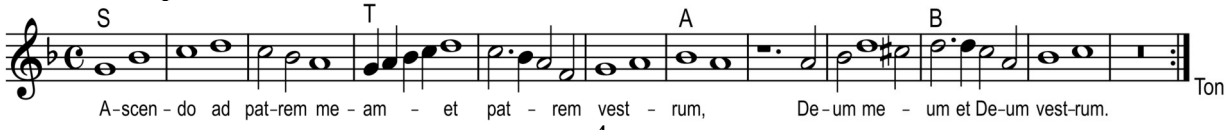
(20) Als **Sequenzen** gelten Kanonsätze, die von periodischen Intervall-Linearkanons erzeugt sind, speziell ***s*-Sequenzen** von D[s]$_{linear}{}^v$ mit Stufe oder Intervall s und |:D:|$_s$ ≔ Dτ_s(D) von D[s]$_{linear}$. 0-Sequenzen sind Ostinati (10).

(21) Als s-**Spiralkanon** gilt ein Intervallkanon, der eine s-Sequenz als Kanonsatz hat. Für $s\neq0$ gilt er als **Kanon per tonos**, für s=0 ist es ein Zirkelkanon.

s-Spiralkanon für $v\geqslant2$	⊂	Linearkanon zum s-Sequenz-Kanonsatz
(a) AB[i|s-i]$_\Pi{}^{2v}$	⊂	A B D+i-s A+i [s]$_{linear}{}^{v+1}$
(b) B$_1$…B$_n$[i_Π|s-i $_{(n-1)\cdot\Pi}$]^{2v}	⊂	B_1 B_2 … B_n B_n+i-s B_1+i … B_{n-1}+i [s]$_{linear}{}^{v+1}$
(c) ABCD[i|j|k|l]$_\Pi{}^{4v}$ mit s ≔ i+j+k+l	⊂	A B C D D+i-s A+i B+i C+i C+i+j-s D+i+j-s A+i+j B+i+j B+i+j+k-s C+i+j+k-s D+i+j+k-s A+i+j+k [s]$_{linear}{}^{v+1}$

Giovanni Maria Nanino (~1543-1607) komponierte vierstimmige Spiralkanons, die zum Text passend einen Ganzton nach oben oder unten modulieren:

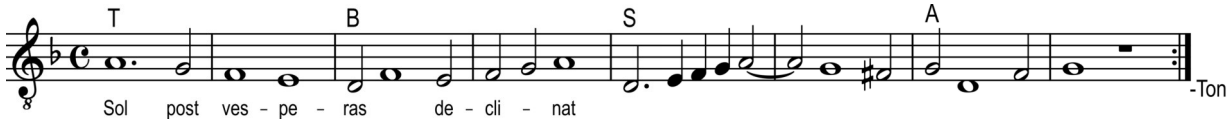
(22)



Der Spiralkanon ABCD[-O|Q|-O|O+Q]$_\Pi{}^{4v}$ ist für v=2 äquivalent zu |:ABCD:|$_{\text{Ton}}$[-O|Q|-O]$_\Pi$ nach folgender Notation:

A B C D A^2 B^2 C^2 D^2 . . . .
A^{-4} B^{-4} C^{-4} D^{-4} A^{-3} B^{-3} C^{-3} D^{-3} . .
A B C D A^2 B^2 C^2 D^2 . . .
A^{-4} B^{-4} C^{-4} D^{-4} A^{-3} B^{-3} C^{-3} D^{-3} .

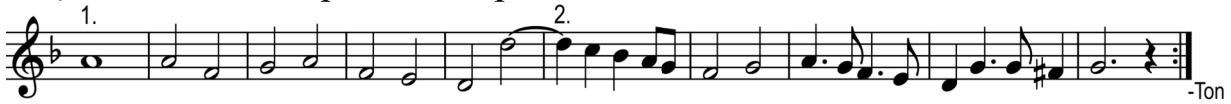
(23) Mit |:A:|$_s$ ≔ $A\tau_s(A)$ gilt |:B$_1$…B$_n$:|$_s$[i_1|…|i_{n-1}]$_\Pi$ ist äquivalent zum s-Spiralkanon B$_1$…B$_n$[i_1|…|i_{n-1}|s-i_1-…-i_{n-1}]$_\Pi{}^{2n}$ und Teilkanon von B$_1$…B$_n$[i_1|…|i_{n-1}|s-i_1-…-i_{n-1}]$_\Pi{}^{v\cdot n}$.

(24) 

Der Spiralkanon ABCD[-Q|2O|-Q|-O]$_{\Pi}{}^{8v}$ ist für v=2 äquivalent zu |:ABCD:|$_{\text{-Ton}}$[-Q|2O|-Q]$_{\Pi}$ in der Notation (23).

$A^{4'}B^{4'}C^{4'}D^{4'}A^{3'}B^{3'}C^{3'}D^{3'}\ .\ .$
$A^{7}\ B^{7}\ C^{7}\ D^{7}\ A^{6}\ B^{6}\ C^{6}\ D^{6}\ .$
$A\ B\ C\ D\ A^{-2}B^{-2}C^{-2}D^{-2}\ .\ .\ .$
$A^{-5}B^{-5}C^{-5}D^{-5}A^{-6}B^{-6}C^{-6}D^{-6}\ .\ .\ .$

Schlichter ist der Spiralkanon von John Dowland (1563-1626), in dem er den Choralanfang von *Vater unser im Himmelreich* kontrapunktierte und einen Ton tiefer wiederholte: Er moduliert abwärts im Quintenzirkel abwechselnd mit einer Quart- und Unterquint-Transposition:

(25) 

Der Quartkanon AB[O-Q|-Q]$_{\Pi}{}^{4v}$ ist für v=2 äquivalent zum Spiralkanon |:AB:|$_{\text{-Ton}}$[O-Q]$_{\Pi}$ in der Notation (23).

$A^{4}\ B^{4}\ A^{3}\ B^{3}\ A^{2}\ B^{2}\ A\ \ B\ .\ .$
$A\ \ B\ \ A^{-2}B^{-2}A^{-3}B^{-3}A^{-4}B^{-4}\ .\ .\ .$

Der bekannteste Spiralkanon stammt aus dem *Musikalischen Opfer* von Bach und hat folgende Form:

(26) |:ABCDEFGB:|$_{\text{Ton}}$[Q]$_{\Pi}$ äquivalent zu ABCDEFGB [Q$_{\Pi}$|Q-O$_{7\,\Pi}$] nach (21)(b).

$T\ H\ E\ M\ A\ R\ E\ X\ T^{2}H^{2}E^{2}M^{2}A^{2}R^{2}E^{2}X^{2}$
$A^{5}B^{5}C^{5}D^{5}E^{5}F^{5}G^{5}H^{5}A^{6}B^{6}C^{6}D^{6}E^{6}F^{6}G^{6}H^{6}$
$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ A^{2}B^{2}C^{2}D^{2}E^{2}F^{2}G^{2}H^{2}$

Diese Spiralkanons haben kleine Sequenz-Intervalle, damit sie beim Wiederholen nicht in extreme Lagen abdriften. Ein konstantes Sequenz-Intervall muss noch kleiner sein wie im Kanon *Mir lächelt kein Frühling* von Johannes Brahms; er erzeugt eine Unterterz-Spirale in Halbtonschritten abwärts durch acht Moll-Tonarten as - g -fis - f - e - es - d - cis:

(27) Der periodische Intervallkanon ABCD[-♯]$_{\Pi}{}^{8}$ ist äquivalent zum Unterterz-Spiralkanon |:ABCD:|$_{\text{-T}}$[-♯]$_{\Pi}{}^{4}$, denn die große Unterterz -T ist eine enharmonische Verwechslung von -4♯ im zwölfstufig temperierten Tonsystem.$^{H(25)}$

Mit Kanonvorschriften hat man die mathematische Außenseite der Kanonkunst im Griff. Die mathematische Innenseite betrifft das Lösen von Problemen beim Komponieren von Kanons. Die Herausforderung besteht darin, aus Melodien harmonische Symmetriestrukturen zu gestalten. Ohne Harmonie und Tonalität wäre dies ein primitives Montieren ohne Reiz. Die Kanontechnik ist daher eine **raffinierte harmonische Kompositionstechnik**. Sie hat seit der Renaissance ihren festen Platz in Kontrapunktlehren. Der mathematische Kern der harmonischen Komposition ist im Heft KONTRAPUNKT ODER KOMPOSITION [*Kp*] bereits erschlossen. Zentral ist der konsonante Satz, der auf die Komposition mit Dreiklängen hinausläuft, aber Quarten über Basstönen meidet.$^{Kp(13)(14)}$ Prim-, Oktav- und Quintparallelen sind verboten, damit Stimmen melodisch unabhängig bleiben.$^{Kp(10)}$ Dissonanzen werden in geregelten Fortschreitungen eingefügt: in Durchgängen, Wechselnoten und Vorhalten.$^{Kp(17)(28)}$ Durch diese Kriterien wird die Kontrapunkt-Definition bestimmt.$^{Kp(26)}$ Sie garantiert natürlich noch kein

musikalisches Kunstwerk, gibt aber eine Richtschnur zur Komposition. Die Regeln, die für den zweistimmigen Kontrapunkt essentiell sind, handhabt man in mehrstimmigen Sätzen zuweilen flexibler. Dort fallen Parallelen oft nicht mehr auf, vor allem in Mittelstimmen und bei Vorhaltsakkorden, die auch Quarten zum Bass verdecken. Über die Güte einer Komposition entscheidet immer die kreative Fantasie, mit der Komponisten die Regeln souverän handhaben.

Da die Kontrapunktregeln weder von der absoluten Tonhöhe noch von fixen zeitlichen Positionen abhängen, tasten manche Kanon-Abbildungen die harmonische Struktur von Kontrapunkten nicht an:

(28) Aus jedem Kontrapunkt A sind folgende Kontrapunkte ableitbar:$^{Dp(24)}$
zu jedem Stimmtausch π ist $\pi(A)$ ein Kontrapunkt,
zu jeder intervalltreuen Transposition τ_i ist $\tau_i(A)$ ein Kontrapunkt,
zu jeder konsonanztreuen Transposition τ ist $\tau(A)$ ein Kontrapunkt,
zu jeder Zeitversetzung $\triangleright p$ ist $\triangleright p(A)$ ein Teil des Kontrapunkts pA,
zu jeder Vergrößerung oder Verkleinerung v ist $v(A)$ ein Kontrapunkt.$^{N(10)}$
Hintereinander ausgeführte Abbildungen dieser Typen gehören jeweils zum selben Typ.

Die Kontrapunktlehre ist der Rahmen, in dem sich die Kanontechnik historisch entfaltete. Sie begann mit Kanons einfacher Machart: Man komponiert Melodie-Bausteine der Reihe nach, dass sie auch vertikal im Block harmonieren. Bei Zirkelkanons (8) wird der Block, sobald die volle Stimmenzahl erreicht ist, nur noch permutiert per Stimmtausch, der musikalisch nichts Neues produziert. Bei längeren Kanons wie dem Sommerkanon (6) wird nach einem vollständigen Block der früheste Baustein durch einen neuen ersetzt. Die Blöcke sind dann melodisch so zu verbinden, dass keine verbotenen Parallelen entstehen; eventuell werden Töne mit passenden Vorzeichen alteriert; auch Quartakkorde sind erlaubt, da ein freier Bass sie abdecken kann. Eine derartige Blockreihe skizziert also nur einen Kontrapunkt. Dieser liefert jedoch eine günstige harmonische Basis zur erfolgreichen Kanonkomposition:

(29) Für Sätze A und B gilt: A ist **Teilsatz** von B, falls B alle Töne von A enthält.
N.B.: Auch $A{=}B$ ist möglich; B muss nicht alle Pausen von A enthalten!

(30) Ein V-Kanon κ mit Vornamen V gilt als V-**Skizze**, falls alle Blöcke eines periodischen Kanonsatzes zu κ Teilsätze alterierter Kontrapunkte sind.
N.B.: Auch Kontrapunkte sind alteriert, da die Identität eine Alteration ist.

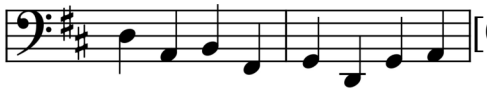
Nun können **unproblematische Kanonkompositionen** im Blocksatz durch Skizzen charakterisiert werden:

(31) Zu einer Reihe von Kontrapunkten $\begin{matrix}\mathsf{B}_{k+n-1}\\ \vdots \\ \mathsf{B}_k\end{matrix}$ für $1 \leqslant k < n \leqslant m$ ist $\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_m[\Pi]^n$ eine periodische Kanonskizze.

(32) Zum Kontrapunkt $\begin{matrix}\mathsf{B}_n\\ \vdots \\ \mathsf{B}_1\end{matrix}$ sind $|{:}\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_n{:}|[\Pi]^{n \cdot v}$ und $\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_n[\Pi]^{2n \cdot v}$ Zirkelkanonskizzen für $v \geqslant 1$.

Die Komposition wird schwieriger bei großer Stimmenzahl, da die Fortschreitungen zwischen Dreiklängen beschränkt sind. Es gibt höchstens neun Fortschreitungen zwischen zwei Dreiklängen (die Anzahl der Tonpaare); eine scheidet bei exakten Quintparallelen aus wegen des Parallelenverbots. Prim- und Oktavparallelen scheiden aus bei Tonverdopplungen und Oktavierungen; dafür entstehen neue Fortschreitungen durch Gegenbewegung oder Tonwiederholung oder eingeschaltete Pausen. Das Machbare demonstrierte Ockeghem in seiner 36-stimmigen Motette (12). Er befolgte – im Gegensatz zu älteren Komponisten wie Landini$^{Dp(37)}$ – das Parallelenverbot: Unter über tausend Fortschreitungen zwischen bis zu 20-stimmigen Akkorden ist nur eine Primparallele, eventuell ein Druckfehler.^{JO16} Sonst ist es ein korrekter Kontrapunkt mit einer ostinaten Harmoniefolge aus Dreiklängen F F C, die er melodisch vielfältig variierte.^{JO18}

Eine ostinate Harmoniefolge ist eine einfache Kompositionsstrategie für lange Kanons im Schema (31). Sie wird oft mit einem Ostinato kombiniert. Ein Ostinato mit Dreiklängen über acht Basstönen mit vielen Variationen wählte Johann Pachelbel (1653-1706) im *Canon per 3 Violini con Basso continuo*, der nach einer Platteneinspielung 1968 zum populärsten Instrumentalkanon wurde:

(33)  $[0]_{linear}{}^{28}$, $\mathsf{B}_1 \cdots \mathsf{B}_{26}[\Pi]^3$ mit $\mathsf{B}_1 = \Pi = 2$

Ein Ostinato mit Akkordfolge F-Dur G-Moll nutzt schon der Sommerkanon (6). Ab der Wiederholung werden bei ihm keine neuen Bausteine eingefügt, sondern die alten wieder eingepasst. Diese kleine Komplikation ist mit einer ostinaten Harmoniefolge leicht lösbar. Das Schema (31) wird für solche längere Zirkelkanons ein wenig modifiziert, indem wiederholte Bausteine unter neuen Nummern erscheinen:

(34) Zur Reihe von Kontrapunkten $\begin{matrix}\mathsf{B}_{k+n-1}\\ \vdots \\ \mathsf{B}_k\end{matrix}$ für $1 \leqslant k \leqslant m$, $n < m$ mit $\mathsf{B}_{k+m} \coloneqq \mathsf{B}_k$ ist $|\!:\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_m\!:\!|[\Pi]^n$ eine Zirkelkanonskizze.

Auch Kontrapunkte mit transponierten Blöcken sind unproblematisch wegen (28). Beim Wiederholen können allerdings Spiralkanons mit Sequenzen entstehen. Da dies transponierte Ostinati sind, ist die Technik analog zu (31) (32) (34):

(35) Der Kontrapunkt D ist der Dux der Linearkanonskizze $\mathsf{D}[i_1|\ldots|i_n]_{linear}{}^{v}$.

(36) Zur Reihe von Kontrapunkten $\begin{matrix}\tau^0(\mathsf{B}_{k+n-1})\\ \vdots \\ \tau^{n-1}(\mathsf{B}_k)\end{matrix}$ mit Transposition $\tau = \tau_x$ für $1 \leqslant k < n \leqslant m$ ist $\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_m[x]_{\Pi}{}^{n}$ eine Intervallkanonskizze.

(37) Zur selben Kontrapunktreihe ist $|\!:\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_m\!:\!|_x[\Pi]^n$ mit wiederholten Bausteinen $\mathsf{B}_{k+m} \coloneqq \tau_x(\mathsf{B}_k)$ für $n < m$ eine Spiralkanonskizze.

(38) Zum Kontrapunkt $\begin{matrix}\mathsf{B}_n + 0i\\ \vdots \\ \mathsf{B}_1 + (n-1)i\end{matrix}$ ist $\mathsf{B}_1 \ldots \mathsf{B}_n[i]_{\Pi}{}^{n \cdot v}$ mit $v \geqslant 1$ eine $n \cdot i$-Spiralkanonskizze.

Zum letzten Schema (38) mit einem permutierbaren Block passt nur der Spiralkanon von Brahms (27), der deswegen ein völlig unproblematischer Kanon ist. Er ließe sich mit einer beliebigen Halbton-Modulation abwärts bauen. Bachs

Spiralkanon (26) passt zum Schema (37) mit eingepasstem ersten Baustein bei der Wiederholung. Er zählt jedoch zu den komplexen Kanons, da er zum gegebenen Thema (rot) an zwei zeitversetzten Stellen harmonieren muss.

Techniken für **komplexe Kanonkompositionen** wurden teilweise schon behandelt im Heft DOPPELTER KONTRAPUNKT. Es referiert die älteste Lehre zu dieser Technik von Nicola Vicentino 1555 und Zarlinos Ergänzungen 1558. Vicentino deutete Kompositionsregeln für doppelte Kontrapunkte nur knapp an; Zarlino arbeitete sie präziser aus, behandelte aber nicht alle doppelten Kontrapunkte. Vicentinos Technik ist allgemeiner und umfasst alle Spiegelkanons, auch den ältesten Typ von Machaut (13): den Krebs als Spiegelung an einer Zeitachse. Vicentino nutzte zum Bau seines Krebskanons einen doppelten Krebs-Kontrapunkt;[Dp(7)(26)] dieser beruht auf zwei äquivalenten Kanonvorschriften, da der Krebs eine selbstinverse Spiegelung $K(K(x))=x$ ist:[Dp(19)]

(39) Der Krebszirkelkanon |:BↃ:|[K] und der Krebskanon $\overset{\mathsf{B}}{\mathsf{C}}[K]_{\Pi}(2,1)^4$ erzeugen beide denselben Kanonsatz |:$\overset{\mathsf{B}}{\mathsf{C}}\mathsf{Ↄ}$:|. Ein zusätzlicher linearer Krebskanon $\mathsf{D}[K]_{linear}{}^4$ erzeugt Machauts Kanon (13) mit krebssymmetrischem Ostinato.

(40) Zum doppelten Krebs-Kontrapunkt $\overset{\mathsf{E}}{K(\mathsf{F})}$ ist |:EF:|$[K]^v$ eine Krebs-Zirkelkanonskizze.

Mit einem doppelten Umkehrungskontrapunkt erzeugte Vicentino aus einem Umkehrungskanon einen zeitversetzten Umkehrungskanon,[Dp(6)] so dass sich beide zu einem Umkehrungszirkelkanon vereinigen.[Dp(21)] Auf die gleiche Weise konstruierte auch Zarlino seine Doppelkanonvariante (16). Dahinter stehen wieder zwei Kanonvorschriften mit analogem Ergebnis, da auch die Umkehrung eine selbstinverse Spiegelung $U_\alpha(U_\alpha(x))=x$ ist (abgekürzt $--x=x$):[Dp(17)]

(41) Zum doppelten Kontrapunkt der Umkehrung $\overset{\mathsf{A}}{\mathsf{-B}}$ ist $\overset{\mathsf{A}}{\mathsf{-B}}[U_\alpha]_{\Pi}(2,1)^5$ eine Umkehrungskanonskizze mit Teilkanon (14) und dem Kanonsatz $\overset{\mathsf{A\ B\ A\ B\ A}}{\mathsf{-B\text{-}A\text{-}B\text{-}A\text{-}B}}$. Der Doppelkanon (15) ist analog gebaut.

(42) Zum doppelten Kontrapunkt der Umkehrung $\overset{\mathsf{A}}{\underset{\mathsf{-B}}{\mathsf{a}}}\ \underset{\mathsf{b}}{}$ ist $\overset{\mathsf{A}}{\underset{\mathsf{-B}}{\mathsf{a}}}\ \underset{\mathsf{b}}{}\ [U_{\mathsf{d'}}]_{\Pi}(4,3,2,1)^5$ eine Umkehrungskanonskizze mit Teilkanon (16).

Die Regeln für doppelte Spiegelungskontrapunkte sind schon präzisiert.[Dp(26)ff] Da sie kaum einengen, sind Spiegelkanons nicht schwer zu komponieren. Spiegelungen sind zwar an den Noten mit den Augen erkennbar, aber mit den Ohren oft nicht mehr: Der Krebs spiegelt Tonfolgen und verfremdet Akkordfolgen und Rhythmen. Die Umkehrung spiegelt Melodien und Akkorde und verfremdet auch gegebene Harmoniefolgen. Das kann man beim Anhören der historischen Spiegelkanons leicht verifizieren. Ein Wiedererkennungseffekt entsteht beim Spiegeln nur bei Themen mit prägnanten Motiven, die man erst im Barock findet, etwa in Bachs *Kunst der Fuge* mit gut erkennbarer Umkehrung, die er in den Spiegelfugen *Contrapunctus 12+13* optimal einsetzte. ♫

Da Transpositionen beim Hören sofort wiedererkannt werden, sind Intervallkanons häufiger als Spiegelkanons. Auch bei ihnen spielen doppelte Kontrapunkte eine Rolle. Zum Beispiel entsteht durch abwechselnde Oktavtranspositionen auf- und abwärts ein Zirkelkanon in zwei Stimmlagen (etwa Bass- und Violinschlüssel); hier ist der doppelte Kontrapunkt der Doppeloktave oder sogar der Vierfachoktave nötig.[Dp(33)f] Diese Technik ist auch auf andere Stufen verallgemeinerbar:

(43) Für doppelte m-Kontrapunkte $\begin{smallmatrix}\mathsf{B}\\ \mathsf{A}^{-n}\end{smallmatrix}$ mit Stufe(m)=Stufe(n)+Sufe(n) laut $H(2)$ sind $|{:}\mathsf{AB}{:}|[n]_{\Pi}$ und $|{:}\mathsf{AB}{:}|[-n]_{\Pi}$ und $\mathsf{AB}[n|-n]_{\Pi}{}^{4v}$ und $\mathsf{AB}[-n|n]_{\Pi}{}^{4v}$ periodische Kanonskizzen laut (23) und (35), eventuell auch Doppelkanonskizzen.

Kanons, die mit dem doppelten Kontrapunkt der Oktave auskommen, sind relativ leicht zu komponieren, da die Zusatzregeln nicht schwer zu erfüllen sind; wenn Füllstimmen hinzutreten, sind nur Quartparallelen zu meiden.[Dp(33)] Schwierig sind nur Kanons im dreifachen Kontrapunkt der Oktave ohne Füllstimmen, weil Dreiklänge nur unter erschwerten Bedingungen gebildet werden können; das wurde schon illustriert an einem komplexen dreistimmigen Kanon.[Dp18f] Diese Technik war wegen ihrer Schwierigkeit nie relevant. Komponisten suchten vielmehr auch bei komplexen Kanons möglichst einfach realisierbare Wege mit einem trickreichen Aufbau. Den gibt es auch beim Oktav-Kontrapunkt mit vier Stimmen, und zwar bei Doppelkanons. Bei ihnen sind Dreiklänge leichter zu bilden: Die höhere Dux-Stimme kann Dreiklangsquinten enthalten, wenn in der tieferen jeweils die Terz oder der Grundton steht; denn in der zweiten Auflösung bleibt diese Konstellation erhalten, so dass keine falschen Quartakkorde entstehen.

Ein Beispiel ist der *Canon a 4* im *Musikalischen Opfer* von Bach mit Bibelzitat *Quaerendo invenietis* (*Suchet, so werdet ihr finden*).[Mt 7,7] Er gehört somit zu den **Rätselkanons**, deren korrekte Auflösung zu suchen ist. Bach notierte vor dem Kanon den Violin- und Bass-Schlüssel, was den Einsatz zwei Oktaven tiefer bestimmt. Die leicht erkennbare Bausteinreihe ABCD ergibt die Einsätze der Stimmen. Leider erzeugt der Baustein D im Bass viele falsche Quarten, die Bach gewöhnlich vermied. Im Bass muss also bei D noch ein tieferer Baustein stehen; dazu eignen sich nur A und C. Als korrekte Lösung, die Editionen leider nicht erkennen und Einspielungen deshalb auch nicht wiedergeben, bleibt nur ein Doppelzirkelkanon mit doppelter Periode vom Typ (43):

(44) Zum Doppeloktav-Kontrapunkt $\begin{smallmatrix}\mathsf{ABCD}\\ \mathsf{DABC}\end{smallmatrix}$ und Vier-Oktav-Kontrapunkt $\begin{smallmatrix}\mathsf{C}&\mathsf{D}\\ \mathsf{A}^{-15}&\mathsf{B}^{-15}\end{smallmatrix}$ ist der Kanon $|{:}\mathsf{ABCD}{:}|[0|-2\mathrm{O}|0]_{\Pi}$ eine Zirkelkanonskizze, die ein Teilkanon der Doppel-Zirkelkanonskizze $\begin{smallmatrix}\mathsf{ABCD}\\ \mathsf{DABC}\end{smallmatrix}[-2\mathrm{O}|2\mathrm{O}]_{2\Pi}{}^{2v}$ ist für $v \geqslant 3$.

$$\begin{array}{cccc|cccc|}
\mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\
 & \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} \\
 & & \mathsf{A}^{-15} & \mathsf{B}^{-15} & \mathsf{C}^{-15} & \mathsf{D}^{-15} & \mathsf{A}^{-15} & \mathsf{B}^{-15} \\
 & & & \mathsf{A}^{-15} & \mathsf{B}^{-15} & \mathsf{C}^{-15} & \mathsf{D}^{-15} & \mathsf{A}^{-15}
\end{array}$$

Rätselkanons sind Denksportaufgaben für Musikfreunde, denen der Kanon gewidmet ist. Bei Bach war es Friedrich der Große, der selbst komponierte; ihm widmete Bach das *Musikalische Opfer* mit raffinierten Stücken über das Thema

des Königs. Auch Dowlands Spiralkanon (25) ist ein Rätselkanon aus dem Album amicorum eines Theologen. Angegeben ist die Einsatzstelle und die Wiederholung einen Ton tiefer, aber kein Einsatzintervall. Dieses ist zu suchen: Die Summe der Einsatzintervalle muss das Sequenz-Intervall ergeben laut (23). Das führt unschwer zur angegebenen Lösung im ergänzten Schema. Sein Kanon beruht auf dem doppelten Kontrapunkt der Oktave. Seine Technik liefert eine Kompositionsstrategie für ähnliche Kanons:

(45) Folgende *s*-Spiralkanon- und *i*-Kanonskizzen sind Teilkanons von Linearkanonskizzen, deren Dux im doppelten Kontrapunkt der Oktave oder Doppeloktave komponiert ist; dieser Nachweis für den Dux genügt für die Korrektheit des Linearkanons und der Teilkanons laut (35):

i=Q *s*=Ton	*i*=O-Q *s*=-Ton	*s*=2*i*-O Dux im 8-Kontrapunkt $\overset{A}{B\text{-}i}$
$AB[Q\|Q\text{-}O]_{\Pi}{}^{2v}$	$AB[O\text{-}Q\|\text{-}Q]_{\Pi}{}^{2v}$ (25)	$AB[i\|i\text{-}O]_{\Pi}{}^{2v} \subset \overset{A}{B}{+}O\text{-}i\ \overset{B}{A}{+}i\,[s]_{linear}{}^{v+1}$
$AB[Q\text{-}O\|Q]_{\Pi}{}^{2v}$ (46)	$AB[\text{-}Q\|O\text{-}Q]_{\Pi}{}^{2v}$	$AB[i\text{-}O\|i]_{\Pi}{}^{2v} \subset \overset{A}{B\text{-}i}\ \overset{B}{A}{+}i\text{-}O\,[s]_{linear}{}^{v+1}$

i=Q+O *s*=Ton	*i*=2O-Q *s*=-Ton	*s*=2*i*-3O Dux im 8'-Kontrapunkt $\overset{A}{B\text{-}i}$
$AB[Q{+}O\|Q\text{-}2O]_{\Pi}{}^{2v}$	$AB[2O\text{-}Q\|\text{-}Q\text{-}O]_{\Pi}{}^{2v}$ (47)	$AB[i\|i\text{-}3O]_{\Pi}{}^{2v} \subset \overset{A}{B}{+}3O\text{-}i\ \overset{B}{A}{+}i\,[s]_{linear}{}^{v+1}$
$AB[Q\text{-}2O\|Q{+}O]_{\Pi}{}^{2v}$	$AB[\text{-}Q\text{-}O\|2O\text{-}Q]_{\Pi}{}^{2v}$	$AB[i\text{-}3O\|i]_{\Pi}{}^{2v} \subset \overset{A}{B\text{-}i}\ \overset{B}{A}{+}i\text{-}3O\,[s]_{linear}{}^{v+1}$

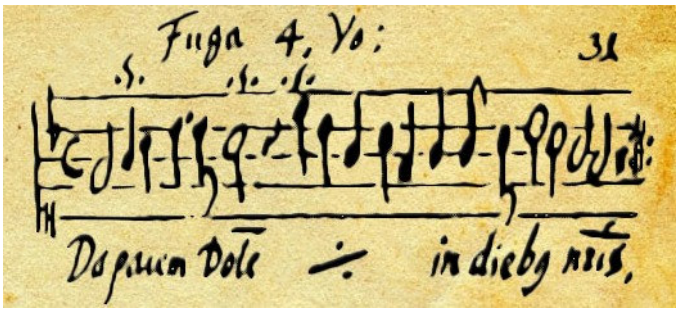
Auch Naninos Spiralkanons sind Rätselkanons, bei denen das Einsatzintervall nach derselben Methode zu suchen und zu finden ist. Er nutzte zwei der tabellierten Muster, allerdings in Doppelkanons mit doppelter Periode. Sein erster Spiralkanon (22) ist ein Unterquart-Doppelkanon mit Ganzton-Sequenz nach oben. Er klappt allerdings nur, wenn der zweistimmige Oktavkanon im Dux ein kreuzungsfreier doppelter Kontrapunkt der Duodezime ist.[Dp(36)] Nanino kombinierte hier also zwei klassische doppelte Kontrapunkte zu einem raffinierten Kanon:

(46) Zum kreuzungsfreien Duodezim-Kontrapunkt $\overset{A}{D^{-9}}\overset{B}{A^{-8}}\overset{C}{B^{-8}}\overset{D}{C^{-8}}$ und zum Oktav-Kontrapunkt $\overset{C}{A^{-4}}\overset{D}{B^{-4}}$ ist der Ton-Spiralkanon (22) ein Teilkanon der Doppel-Spiralkanonskizze $\overset{A}{D^{-9}}\overset{B}{A^{-8}}\overset{C}{B^{-8}}\overset{D}{C^{-8}}[Q\text{-}O|Q]_{2\Pi}{}^{2v}$ laut $(45)_3$ für $v \geqslant 3$.

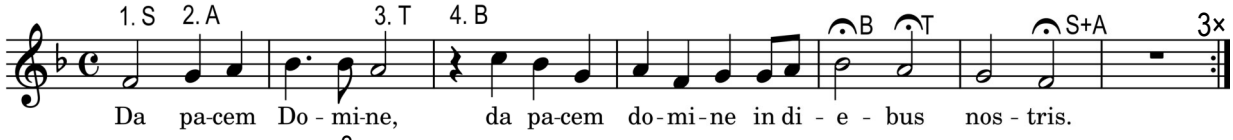
Der zweite Spiralkanon (24) ist ein Undezim-Doppelkanon mit Ganzton-Sequenz nach unten. Der zweistimmige Dux ist diesmal ein Unterquartkanon im Duodezim-Kontrapunkt mit Auflösung im Bass-Sopran. Diese erscheint auch im Tenor-Alt im Oktav-Kontrapunkt, der jedoch automatisch erfüllt ist, da zum Bass keine Fehler entstehen können. Aufgrund dieser Konstellation konnte er hier dieselbe Technik anwenden:

(47) Zum kreuzungsfreien Duodezim-Kontrapunkt $\overset{A}{D^{-4}}\overset{B}{A^{-5}}\overset{C}{B^{-5}}\overset{D}{C^{-5}}$ und Doppeloktav-Kontrapunkt $\overset{C}{A^{4'}}\overset{D}{B^{4'}}$ ist der -Ton-Spiralkanon (24) ein Teilkanon der Doppel-Spiralkanonskizze $\overset{A}{D^{-4}}\overset{B}{A^{-5}}\overset{C}{B^{-5}}\overset{D}{C^{-5}}[2O\text{-}Q|\text{-}O\text{-}Q]_{2\Pi}{}^{2v}$ laut $(45)_6$ für $v \geqslant 3$.

Naninos Spiralkanons nutzen die vier Stimmlagen eines Chors, modulieren aber und sprengen schnell den Stimmumfang. Daher sind sie kaum geeignet für die praktische Chormusik. Besser wären tonal stabile **Fugenkanons**, von denen es nur wenige gibt. Populär wurde die Fuga *Da pacem domine* von Melchior Franck, die er 1629 in ein Gästebuch schrieb. Das Faksimile zeigt vor dem Wiederholungszeichen deutlich eine ganze Pause, die alle Druckausgaben unterschlagen. Daher wird sein Rätselkanon hier exakt in heutiger Notenschrift wiedergegeben mit der intendierten Lösung: An den markierten Einsatzstellen ergibt sich ein enggeführter Unterquart-Kanon der Frauenstimmen, den die Männerstimmen im Unteroktav-Doppelkanon wiederholen:



(48)



|:ABCDEFGHIJKL▬▬:|$^{3\times}$ [Q-O▬|-Q_2▬|Q-O▬] mit Periode ∏=▬ ist äquivalent zum Doppelzirkelkanon |: ABCDEFGHIJKL▬▬ / (▬ABCDEFGHIJKL▬)$^{-4}$:|$^{3\times}$ [-O]$_{3∏}$.

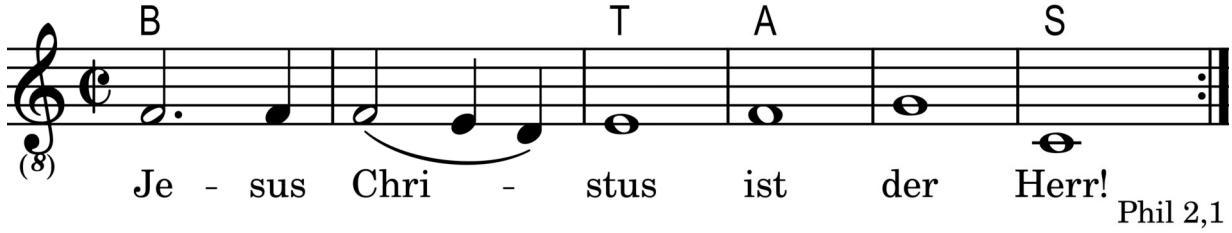
Die Pause am Schluss ist wichtig: Da der Tenor eine Halbe vor dem Bass einsetzt, würde er ohne Pause an der Bass-Schlussnote c neu anfangen mit f, was eine falsche Quarte ergäbe. Durch die Pause vermied Franck diesen satztechnischen Fehler. Zugleich verwandelte er einen unproblematischen Doppelkanon vom Typ (36) durch eine geschickt eingepasste Wiederholung an frühest möglicher Stelle in einen Doppel-Zirkelkanon, der ein Spezialfall vom Typ (37) ist.

Bemerkenswert ist auch seine Technik zur Erhaltung der Tonart. Erstens passt die Melodie mit Quintambitus auch eine Quarte tiefer in die Tonart und zwingt nicht zur Modulation. Zweitens wählte er statt periodischer Einsätze, die zur Modulation gezwungen hätten, abwechselnde Einsätze in einer und zwei Perioden; das ergibt einen Doppelkanon nach drei Perioden, den er mit der ostinaten Harmoniefolge FCB löste: Der Dux greift aus C-Dur stets den Ton g heraus, das ist im Comes d, so dass das harmonische Kanonschema FgBFgBFgBFgB / CdFCdFCdFCdF entsteht, das er nur noch melodisch variieren musste.

Franck meinte mit dem Titel Fuga keine Fuge im heutigen Sinn, denn diese hätte keine enggeführten Einsätze. Auch die ältesten nicht-periodischen Doppelkanons von Pierre de la Rue in seiner *Missa O Salutaris hostia* sind lauter enggeführte Unterquintkanons ohne einprägsame Themen;$^{K(21)}$ sie sind zudem nicht intervalltreu, denn sonst hätten sie den damals üblichen Rahmen der Kirchentonarten gesprengt. Franck schaffte es, in der Tonart zu bleiben, obwohl er intervalltreu transponierte.

Innerhalb einer Tonart, genauer in der barocken Kadenz $F^{6}_{5}G^{7}C$, verwirklicht der Fugenkanon am Schluss des Heftes UNSER HARMONISCHES TONSYSTEM Francks Idee kompakt mit der Minimalzahl von sechs Perioden:

(49)

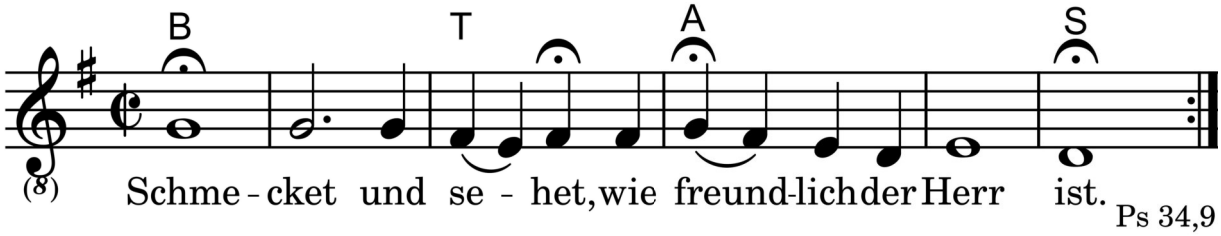


Phil 2,1

Der Trick ist eine Dominante G^{7} ohne Terz; zur Transposition D^{7} ohne Terz passt die Mollterz, was eine Subdominante mit Sixte ajoutée F^{6}_{5} ergibt. Somit lautet $FG^{7}C$ transponiert $CF^{6}_{5}G$, so dass im Kanonschema $F\ G^{7}C\ F\ G^{7}C\ F\ G^{7}C\ F\ G^{7}C$ offenbar die barocke Kadenz fünfmal wiederholt wird. $C\ F^{6}_{5}G\ C\ F^{6}_{5}G\ C\ F^{6}_{5}G\ C\ F^{6}_{5}G$

Der Rätselkanon auf dem Titel realisiert diese Kadenz in einer anderen Tonart, jedoch etwas freier mit einem Dominant-Terz-Quart-Akkord:

(50)



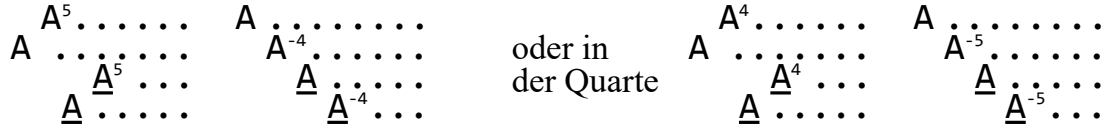
Ps 34,9

Beide Kanons legen enge Einsätze nahe analog zu Francks Kanon. Weil aber die Reihenfolge nicht festgelegt ist, kann man auch weite Einsätze wählen, bei denen das Thema vorweg ganz zur Geltung kommt. So erst klingen sie wie Fugen im heutigen Sinn und halten auch das, was Fugenkanons dem heutigen Wortsinn nach versprechen:

(51) Die Rätselkanons (49) und (50) haben jeweils eine enggeführte Auflösung:
Dux$[Q_2\text{-}|O\text{-}Q\text{-}|Q_2\text{-}|\text{-}O\text{-}Q\text{-}]^{4v}$.
Beide Fugenkanons haben auch Auflösungen mit weiten Einsätzen:
Dux$[Q_5\text{-}|O\text{-}Q_4\text{-}|Q_5\text{-}|\text{-}O\text{-}Q_4\text{-}]^{4v}$ oder Dux$[\text{-}Q_4\text{-}|Q\text{-}O_5\text{-}|\text{-}Q_4\text{-}|O{+}Q_5\text{-}]^{4v}$.

Die Bedeutungsverschiebung von der Fuga als Kanonsatz zur Fuge im heutigen Sinn vollzog sich im Barock. Der Terminus meinte von da an meist eine freie mehrstimmige Komposition mit einem längeren Thema als Dux, das der Comes in der Quinte imitiert, aber selten genau transponiert, sondern tonal beantwortet mit veränderten Intervallen. Manche Fugen imitieren auch in der Quarte, etwa der *Contrapunctus X* aus der *Kunst der Fuge.* Was aufs Thema folgt, ist freigestellt. Daher verschwinden in Fugen alle kanontechnischen Einschränkungen. Nur noch die thematische Imitation zählt und richtet sich nur grob an Fugenschemata wie diese:

(52)



Im Barock wurde auch das Modulieren in andere Tonarten erst richtig üblich. Ein Quintkanon mit einprägsamem Thema moduliert dann in die Dominante und verschmilzt die Form der Fuge mit der Fuga im alten Sinn. Ein Musterbeispiel ist Bachs Fuga Canonica aus dem *Musikalischen Opfer*:

A⁵B⁵C⁵D⁵A⁸F⁵G⁵
A B C D A⁴F G H
a b c d e f A⁻⁸h

(53) ABCDA⁴FG[Q]∏ mit ∏=10 (zehn Takte) ist ein Teilkanon in Nach der Exposition mit A und A⁵ modulierte er über C D in die Subdominante A⁴ mit Antwort A⁸ im doppelten Duodezim-Kontrapunkt $\frac{A^{8}}{F}$, den er im freien Bass $\frac{F^{5}}{A^{-8}}$ anwandte zum dreistimmigen Fugenschluss.

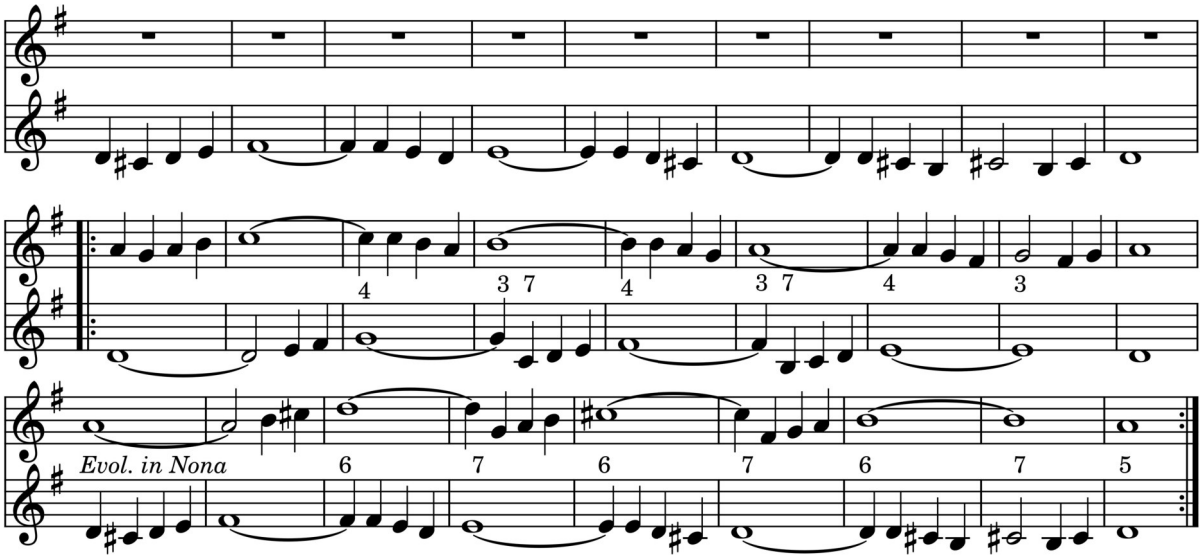
Periodische Fugenkanons gibt es in der Kanonliteratur nicht. Schon in zweistimmigen Teilkanons treten heftige Doppel-Kontrapunkt-Probleme auf:

(54) Für doppelte Non-Kontrapunkte $\frac{B}{A^{-5}}$ sind AB[5♯|-5♯]∏ und AB[-5♯|5♯]∏ periodische Fugenkanonskizzen laut (43).

(55) Für doppelte Septim-Kontrapunkte $\frac{B}{A^{-4}}$ sind AB[4♯|-4♯]∏ und AB[-4♯|4♯]∏ periodische Fugenkanonskizzen laut (43).

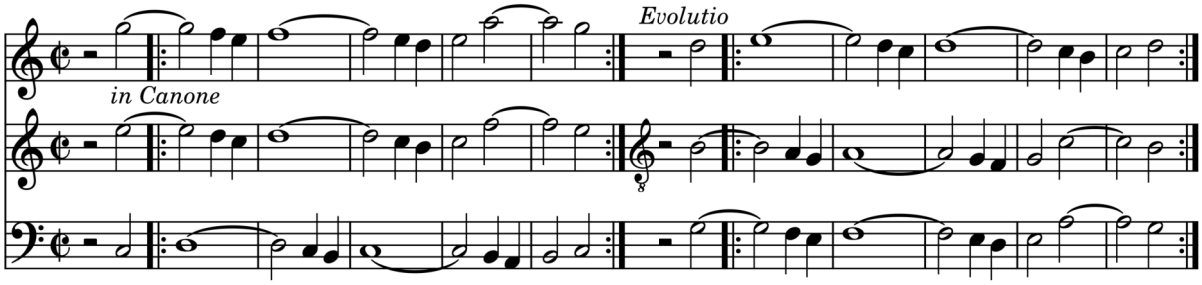
Friedrich Wilhelm Marpurg, der diese doppelten Kontrapunkte erstmals 1753 behandelte, bewies, dass sie lösbar sind, obwohl fast alle Konsonanzen wie Dissonanzen zu behandeln sind. Legal ist im zweistimmigen Kontrapunkt der None nur die Quinte.*Dp*(40) Daher nutzte Marpurg in seinem Beispiel eine von Quinten umrahmte verzierte Vorhaltskette 4-3-4-3-4-3, die in der Non-Auflösung zur umgepolten Vorhaltskette 6-7-6-7-6-7 wird.*Dp*(41) Im periodischen Fugenkanon, der daraus mit dem Theorem (54) ableitbar ist, erklingt seine originale Auflösung eine Quinte höher und moduliert in die Dominante:

(56)



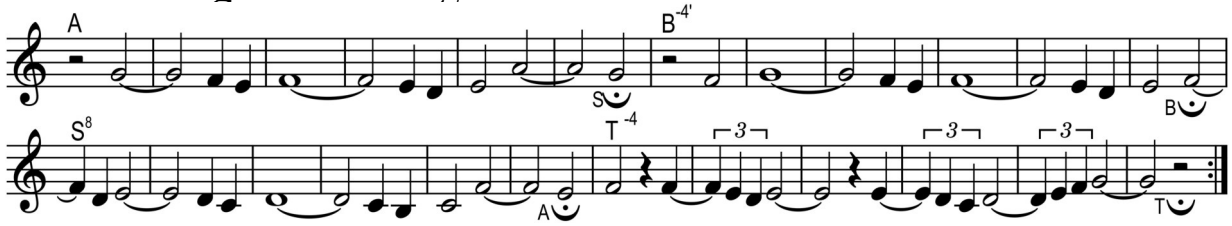
Dieser Fugenkanon hat nur den Schönheitsfehler, dass er nicht intervalltreu ist. Die exakt transponierte Altstimme würde zur Modulation zwingen und im Sopran die Töne gis' und cis" erzeugen, die nicht mit der Tonart G-Dur harmonieren. Zudem klingen hohle Quinten am Schluss mittelalterlich. Marpurg gab daher auch einen doppelten Kontrapunkt der oktavierten None mit Terzparallelen an, die hohle Quinten ausfüllen:*Dp*(42)

(57)



Dieser Satz hat eine besondere Eigenschaft: Beide Terzparallelen stehen offensichtlich zum Bass im doppelten Kontrapunkt der Septime. Dieser ist günstiger als der doppelte Non-Kontrapunkt, da Terzen und Quinten legale Konsonanzen sind,[Dp(47)] so dass Dreiklänge möglich sind. Marpurgs Satz bietet sich für eine kanontechnische Anwendung an. Er ist nämlich vierstimmig erweiterbar durch einen Tenor im Oktav-Kontrapunkt zum Bass, so dass beide Terzparallelen auch zum Tenor im Septim-Kontrapunkt stehen. Dieser erweiterte Kontrapunkt kann dann mit einer Variante des Theorems (55) als ein vierstimmiger periodischer **Permutationsfugenkanon** aufgerollt werden:

(58)



(59) Für Septim'-Kontrapunkte $\begin{smallmatrix}A&B&C&D\\D_{-4'}&A_{-4'}&B_{-4'}&C_{-4'}\end{smallmatrix}$ und Oktav'-Kontrapunkte $\begin{smallmatrix}A^8B^8\\C\ D\end{smallmatrix}$ ist $\mathsf{ABCD}[\text{-}4'|4''|\text{-}4'|4]_{\Pi}{}^{4v}$ eine Fugenkanonskizze und ein Teilkanon der Doppelzirkelkanonskizze $|:\begin{smallmatrix}A&B&C&D\\D_{-4'}&A_{-4'}&B_{-4'}&C_{-4'}\end{smallmatrix}:|[\mathrm{O}|\text{-}\mathrm{O}]_{2\Pi}{}^{3v}$ laut (43).

Die aus Marpurgs Material konstruierten periodischen Fugenkanons schließen die Lücke in der Kanonliteratur. Sie runden auch den Bereich der Kanontechnik ab, in dem nach mathematischen Prinzipien Lösungen für komplexe Kanons berechnet werden können. In anderen Bereichen, wo berechenbare Lösungsstrategien versagen, ist Kreativität und Einfallsreichtum gefragt. Dazu gehören doppelte Kontrapunkte mit Zeitversetzung gegenüber einem Cantus firmus, bei der ein Kanon mit einer gegebenen Melodie kombiniert wird. Vicentinos zwei- oder dreitaktige Beispiele dazu sind magere Skizzen.[Dp(2)(3)] Unter den erwähnten kunstvollen Beispielen gehört nur eines zu diesem Typ: Bachs Kanon zum Thema Friedrichs des Großen, rot markiert in (26). Ohne Cantus firmus wäre es ein primitiver Fugen-Spiralkanon, mit Cantus firmus jedoch fällt er unter die komplexen Kanonformen, die nicht einfach zu lösen sind.

Kanons zu einem Cantus firmus gehen auf Josquin Desprez zurück. Berühmt ist seine fuga ad minimam, ein klangschöner enggeführter Doppelkanon zu einer damals populären Melodie.[K(18)] Zu diesem Kanontyp steuerte Zarlino einen Variationszyklus über den Choral *Veni creator spiritus* bei,[K(30)] der die Kanonkunst der norddeutschen Orgelschule von Sweelinck bis Bach inspirierte. Sie

wurde in der KANONKUNST behandelt mit Hörbeispielen und parallel edierten Noten.[R] Dort findet man im zweiten Teil auch viele eigene Kanons, die historische Ideen in eine neue komplexere Kanontechnik einbeziehen. Zur Gruppe der Fugenkanons gehört etwa die Kanon-Fughette *Nun lasst uns Gott dem Herren* als intervalltreuer Quart-Doppelkanon mit Choral im Bachstil.[K(42)] Ferner greift ein Permutationsfugenkanon Francks Idee auf:[K(53)] Eine fünftaktige Periode wird kaum merklich verlängert $\Pi_2 = \frac{11}{10}\Pi$ im quasi periodischen Fugenkanon $\mathsf{Dux}[Q\text{-}O_\Pi|\text{-}Q_{\Pi_2}|Q\text{+}O_\Pi|\text{-}Q_{\Pi_2}]$ und mit einem Choralkanon kombiniert; er eröffnet die Kanon-Fuge über *All Morgen ist ganz frisch und neu* in einer symphonischen Klangwelt.

Literatur

Dowland, John: Spiralkanon mit Faksimile: https://www.youtube.com/@puzzlecanon_

Franck, Melchior: *Da pacem domine*, Faksimile: https://melchior-franck.de/biografie/

Nanino, Giovanni Maria: Spiralkanons mit Faksimile: https://www.youtube.com/@puzzlecanon_

[K] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024.
[R] *Komplexe Kanons der Renaissance*, ed. 2025.
[JO] Johannes Ockeghem: *Deo Gratias*, ed. 2025.
www.neumaier-wilfried.de/kanonkunst
[MM] *Musik-Mathematik kurz gefasst*, Heft 1-5:
[H] *Unser harmonisches Tonsystem*, 2025
[N] *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025.
[Kp] *Kontrapunkt oder Komposition*, 2025.
[Dp] *Doppelter Kontrapunkt*, 2026.
[KT] *Kanontechnik*, 2026.
www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft

Titelbild: Wilfried Neumaier: Fugenkanon 1980, Model-Abdruck

***

Update November 2026