

Wilfried Neumaier

# UNIVERSALLOGIK

Eine Synthese klassischer Logiken  
von Aristoteles, Leibniz, Boole,  
Frege, Peano, Cantor, Zermelo

# VERBALE LOGIK

Ein Grammatik-Kalkül  
nach Ideen von Leibniz und Peano

Georg Olms Verlag, Hildesheim, Zürich, NewYork, 2020.  
ISBN 978-3-487-15927-0

# Inhaltsverzeichnis

<b>Idee</b>	IX
<b>Dialog zur Sprachphilosophie</b>	
1. Akt: Paradoxe Anfang	1
2. Akt: Paradoxe Fortschritt	9
<b>I Universallogik</b>	
<b>I.1 Historisch-methodischer Überblick</b>	
Leibniz-Programm: universelle Symbolsprache, Universalkalkül	25
Historische Etappen zum Universalkalkül	26
Dialektische Synthese historischer Logiken, Hegelprinzipien	28
Logik-Hierarchie	30
<b>I.2.1 Algebraische Logik • Aristoteles</b>	
Texte, Identität, Konjunktion, Negation, definierte Texte, Terme	33
Explizite Definitionen, implizite Definitionen, Axiome	34
Schlussregeln, Kalkül, Beweise, Theoreme	35
Logikaxiome, Bits, Wahrheitswerte, direkte Beweise	36
Algebraische Implikation, Regeln, Syllogismen	37
Folgerungen, Modus ponens, Kettenschluss, Identitätsaxiom	38
<b>I.2.2 Semantik • Aristoteles</b>	
Nichtformale Logik, Wahrheitstabellen	39
Tabellen, Tabellenschemata, Analyse, ungültig, gültig	40
Modelle, Logikmodelle	41
Begriffslogik, Begriffsmodell, Ideen	42
Konsistenz, Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit	43
<b>I.2.3 Klassische Logik • Aristoteles • Boole</b>	
Indirekte Beweise, klassische Axiome, Disjunktion	45
Kategorische Aussagen	46
Boolescher Ring, exklusive Normalform	47
Aristoteles-Boole-Synthese, Boole-Schröder-Algebra	48
<b>I.3.1 Gleichheitslogik • Leibniz</b>	
Gleichheitsaxiome, Aussagen, Aussagenlogik	49
Zweiwertige Aussagen-Teillogik	50
Verbandsordnung	51
Modallogik	52
Fall-Definitionen, Individuen, Elementprädikat	53
Existenz, ontologische Sprache	54

<b>I.3.2 Extensionale Logik • Leibniz</b>	
Extension und Intension, extensionale Axiome	55
Extensionale Logikmodelle, nominalistische Modelle	55
Binäre Aussagenlogik, binäres Modell	57
Extensionale Modalbegriffe, Mengen von Mengen	58
Mengenlogik, Mengenaxiome	59
Mengenlogikmodelle	60
<b>I.3.3 Quantorenlogik • Leibniz • Frege</b>	
Quantoren, Unbestimmte	61
Nominalistische Quantorenlogik (Leibniz)	62
Frege-Kalkül	63
Leibniz-Frege-Synthese: Quantorenaxiome	67
Mehrsortige Quantorenlogik, Sorten	68
Logik zweiter Stufe, Russellsche Antinomie	69
<b>I.4.1 Klassenlogik • Peano</b>	
Universale Symbolsprache, Klassen, Quantorendefinitionen	71
Klassenaxiome, Klassenmodelle	73
Synthese älterer Logiken: extensionale Quantorenlogik	75
Potenz, Durchschnitt, Vereinigung	77
Kennzeichnung, bedingte Definition	78
<b>I.4.2 Relationslogik • Peano</b>	
Relationen, Paare, Relationsaxiome	79
Funktionen, Funktionswert	79
Abbildungen	81
<b>I.4.3 Komplementäre Mengenlogik • Peano</b>	
Komplementäre Axiome, komplementäre Mengenmodelle	83
Intensionale Sprache	85
Wahre Ideen, ontologische Ideen	86
<b>I.4.4 Arithmetik • Peano</b>	
Peano-Axiome, Peano-Modell	87
Vollständige Induktion, Arithmetikaxiome	88
Mengenarithmetik, explizite rekursive Definitionen	89
Mengenarithmetik- und Arithmetikmodell	90
Problematik der expliziten Zahldefinition	91
Dedekind-Axiome	92
Auswahloperator, Repräsentant	94

<b>I.5 Mengenlehre • Cantor • Zermelo</b>	
Cantors Mengendefinition	95
Allgemeine Mengenlehre, Cantor-Axiome, Cantor-Modelle	96
Cantorsche Antinomie, Kardinalzahlen	97
Ordinalzahlen	98
Burali-Forti-Antinomie	99
Transfinite Induktion	100
Finit definierte Arithmetik, transfinite Mengenlehre	101
Folgen, Rekursion mit Ordinalzahlen	102
Wohlordnungssatz	103
Mengenbilder	104
Zermelos Mengendefinition	105
Zermelo-Axiome, Urelemente	106
Zermelo-Fraenkel-System, ZF-System	107
ZF'-System, Fundierungsaxiom, ZF'-Modell	109
Cantor-Zermelo-Synthese: explizite Mengendefinition	110
<b>I.6 Universallogik</b>	
Peano-Cantor-Synthese: komplementäre Mengenlehre	111
Explizite Universum-Definition, Universalkalkül	112
Reale Mengenkompimente, transfinite Universallogik	113
<b>I.7 Calculus</b>	
<b>I.7.1 Beweistechnik</b>	
Argumente, Argumentnamen	115
Ableitungen, elementare Beweise	116
Algebraische Beweise, Folgerungen	117
Hilfssätze, Hilfsdefinitionen	118
<b>I.7.2 Symbole &amp; Definitionen</b>	119
Verbale Definitionen, Definitionsschemata	122
<b>I.7.3 Theoreme &amp; Beweise</b>	
im Logikkalkül	123
im klassischen Logikkalkül	125
im Gleichheitslogikkalkül	128
im extensionalen Logikkalkül	133
im Quantorenlogikkalkül	137
im Klassenkalkül	139
im Relationskalkül	145
im komplementären Mengenkalkül	153

im Arithmetikkalkül	155
im Mengenlehre-Kalkül	163
im Universalkalkül	185

## **II Verbale Logik**

Inhaltsverzeichnis	189
--------------------	-----

### **Verzeichnisse**

Argumente	267
Logische Wörter in Definitionen	270
Fachtermini	271
Hinweiszeichen	273
Personen	274
Literatur	275

# Idee

Die UNIVERSALLOGIK behandelt die wichtigsten klassischen Logiken der Geschichte, stellt sie in aktueller symbolischer Notation in Kalkülform dar und vereinigt sie zu einer geschichtsübergreifenden Logik, die ältere Vorstufen optimiert. Sie will, wie der Titel signalisiert, das Leibniz-Programm einer universalen logischen Kalkülsprache weiter vorantreiben. Er realisierte es im Rahmen der aristotelischen Logik und inspirierte gegen Ende des 19. Jahrhunderts Frege zur Entwicklung der Prädikatenlogik und Peano zur Entwicklung der Klassenlogik, die durch die Mengenlehre von Cantor und Zermelo verdrängt wurde. Historische Ansätze und Kalküle dieser Logiker werden hier anhand der Quellen aufgearbeitet und in einen radikal vereinfachten, aber wesentlich leistungsfähigeren Universalkalkül eingebettet.

Die Universallogik geht über ihre vielschichtigen historischen Wurzeln hinaus und aktualisiert auch vernachlässigte Traditionen. Dazu gehören vor allem der algebraische Zugang zur Logik und die ganzheitliche Auffassung als Termlogik für Begriffe und Aussagen. Algebraische Termkalküle verbinden nämlich eine stärkere Ausdruckskraft mit einer formalen Vereinfachung. Teils wurden sie schon in den ARISTOTELISCHEN LOGIKEN [A] publiziert. Dort finden Interessierte historische Bezüge und Details zur Logik bis Leibniz, die hier nicht alle wiederholt werden. Nur Grundlagen daraus werden aufgegriffen und abgestimmt auf den Ausbau zur Universallogik.

Algebraische Termkalküle knüpfen neu an die umgangssprachlich motivierte logische Sprache der alten Logiker an, zu denen außer Frege alle im Untertitel genannten Namen zählen! Von ihnen stammen die wesentlichen Ideen für die Logik. Ihre Sprache konnten jedoch Logiker des 20. Jahrhunderts nicht zufriedenstellend in ihre Kalküle übertragen, da sie sich zu enge Rahmenbedingungen setzten. Frühere Logiker engten sich nicht ein und legten sich syntaktisch nicht starr fest, sondern gingen unbefangener an den logischen Stoff heran, natürlich auch mit mehr Risiko. Erst spätere Logiker nahmen syntaktische Reglementierungen vor, um sich gegen eine widersprüchliche unregelmäßige Sprache zu schützen. Diesen Schutz erreichten sie auch, aber um den Preis großer Kompliziertheit.

Eine genauere Diagnose jedoch macht klar, dass die Sprachprobleme, die es logisch zu bewältigen galt, gar nicht auf der Syntax beruhen, sondern auf den Beweismitteln, die Logiker sich wählten. Werden sie nicht optimal durchdacht, was auf Anhieb auch nicht so leicht gelingt, dann erfordern sie syntaktische Flankierungen mit allerlei Nebenwirkungen. Diese Nebenwirkungen verschwinden, wenn man künstliche syntaktische Mittel absetzt und

sich neu auf die natürliche Sprache einlässt. Es ist eine viel weitere Sprache mit ungenutzten Möglichkeiten. Die Rückbesinnung auf ältere Logiker, die in dieser Sprache dachten, ist daher lohnend und fördert manches zu Tage, was für eine aktuelle Logik wertvoll ist. Die Universallogik nutzt das historische Material und die flexiblere Syntax. Es zeigt sich dann, dass sich in dieser Sprache die etablierten Logiken viel übersichtlicher und effektiver darstellen lassen.

Das historische Material, das in die Universallogik eingeht, wird nur knapp vorgestellt und dann aufgearbeitet. Es geht nicht um eine Darstellung historischer Logiken, obwohl hier schon auf Authentizität großen Wert gelegt wird und die alten Logiker wirklich zu Wort kommen. Im Endeffekt geht es vielmehr um eine Aktualisierung und Fruchtbarmachung ihrer wesentlichen Gedanken, also um eine quellenbezogene aktuelle Interpretation, die in eingerückten Blöcken (1) ... (501) festgehalten wird. Die Interpretationsmethode, die sich auf Primärquellen konzentriert, ist schon erörtert und vorgeführt worden in den ARISTOTELISCHEN LOGIKEN [A], so dass hier eine Wiederholung entbehrlich ist. Angesichts des umfangreichen Stoffs, den das Buch erfassen und auf neue Weise vermitteln will, ziehe ich wieder die prägnante Kürze vor und verzichte auf eine Diskussion von Deutungsvarianten. Trotzdem werden Deutungsprobleme oft angesprochen, mindestens kurz in den Fußnoten.

Obwohl hier mehr Stoff behandelt wird als in anderen Logikbüchern, weil die Mengenlehre logisch abgeleitet wird, genügt zur Darstellung ein übersichtlicher Vorrat an Zeichen, die praxisnah gewählt sind, um auch den formalistischen Zugang zur Logik zu erleichtern. Weil gegenüber der etablierten Logik an Schlüsselstellen wirkungsvolle Optimierungen vorgenommen werden, wird die logische Sprache im Buch von Grund auf neu entwickelt und erklärt. Die logische Terminologie wird deswegen hier komplett eingeführt und an das neue allgemeinere Konzept angepasst. Sie verträgt sich dann aber automatisch auch mit gängigen Konzepten, weil diese eingebettet werden.

Zum Verständnis aller Sprachebenen der Universallogik ist somit keine mathematische Fachliteratur nötig. Auch keine Theoreme oder Metatheoreme und Beweise aus anderen Logikbüchern werden herangezogen. Vielmehr werden hier sämtliche Beweise in Kalkülform gegeben im umfangreichen Schlusskapitel des ersten Teils (I.7). Dort wird auch eine bedienungsfreundliche allgemeine Beweistechnik bereitgestellt. Dieser Kalkülteil ist eine perfektionierte und aktualisierte logische Formelsammlung zur Universallogik im Stil der *Logique mathématique* aus Peanos *Formulaire*.

Die **VERBALE LOGIK** baut die Universallogik in einer logischen Grammatik zur präzisen logischen Verbalsprache aus. Sie aktualisiert Ideen von Leibniz und Peano, der das Leibniz-Programm aufgriff und die Weichen stellte für eine leistungsfähige Verbalsprache, die gleichwertig zur Symbolsprache ist. Es ist keine mathematische Kunstsprache, sondern ein Kernstück der bekannten Umgangssprache. In grammatikalisch präzisierter Form, die eine eindeutige Formalisierung sicherstellt, ist es ein nützliches Werkzeug für alle, die sich exakt und verständlich ausdrücken wollen.

Die Grammatik-Komponente des Leibniz-Programms trat mit der Entwicklung der Symbolsprache in den Hintergrund. Logiker und Mathematiker hatten seither ein bewährtes System, in dem sie den Problemen der mehrdeutigen Verbalsprache aus dem Weg gehen konnten. Die Umgangssprache spielte von da an in logischen Texten nur noch eine Nebenrolle. Mathematiker gebrauchten sie natürlich nach wie vor intuitiv, um ihren Stoff verständlich zu vermitteln. Sachkundige Leser sind darin geübt, aus halbverbalen mathematischen Texten vollends eine Formalisierung herzustellen. Sie wissen aber auch, dass es allerlei Ungenauigkeiten geben kann, die bei einer formalen Übersetzung auszugleichen sind.

Das Aufkommen der Computertechnik machte dann präzise Beschreibungen von Programmiersprachen zur Bearbeitung mathematischer Probleme nötig. In der Informatik wurden dazu auch neue grammatische Methoden zur Sprachanalyse entwickelt. Diese haben jedoch mit der umgangssprachlichen Grammatik nicht viel gemein. Versuche, die natürliche Sprache mit diesen Techniken logisch griffig zu machen, waren nur partiell erfolgreich. Eine wirklich tragfähige grammatikalische Brücke von der Umgangssprache zur logischen Sprache ist meines Wissens noch nicht gebaut worden. Selbst zum engen Bereich der etablierten logischen Formelsprache (Prädikatenlogik mit Mengenlehre) fehlt noch ein verbales Pendant, das ebenso exakt und gleichwertig wäre.

Leibniz koppelte seine Grammatik noch an die Begriffslogik der aristotelischen Tradition. Auch Peano, der Pionier der heutigen Symbolsprache, ging von dieser Sprache aus. Sie verlor jedoch im 20. Jahrhundert rasch an Bedeutung. Mit dem Untergang seiner Klassenlogik verschwand auch sein geniales Sprachsystem, das sowohl formal als auch linguistisch außerordentlich leistungsstark war. Seine Logik war noch wie die aristotelische Logik eng an die Umgangssprache angelehnt. Deshalb ist sie eine ideale Basis für eine Aktualisierung der logischen Sprache auf formaler und verbaler Seite. Sein Kalkül, der die Leibniz-Sprache umfasst, ist das beste Fundament, auf dem das brachliegende Problemfeld ‚Grammatik‘ nach den Leitlinien beider Logiker rekultiviert werden kann, selbstverständlich mit heutigem Exakt-



heitsanspruch. Da dieser Kalkül bereits eine einfache feste Syntax aufweist, ist die darauf aufbauende verbale Logik nicht auf Grammatikkonzepte der Informatik angewiesen. Die logische Grammatik kann vielmehr die bekannte Definitionstechnik nutzen: Sie definiert eine verbale Sprachoberfläche mit vielfältigen Ausdrucksmöglichkeiten, deren eindeutige Formalisierbarkeit gesichert ist. Dadurch verleiht sie einem zentralen Teilbereich der bekannten Umgangssprache ein exaktes logisches Niveau.

Der einleitende Dialog zur Sprachphilosophie behandelt in unterhaltsamer Form die Hauptetappen der Logikgeschichte und die Klippen, die bei der Entwicklung der logischen Sprache zu überwinden waren. Der Dialog gibt zugleich eine Kostprobe davon, was in der verbalen logischen Sprache präzise formuliert werden kann. Diskutiert werden dort zunächst zwei antike Paradoxien, zwei Versionen des sogenannten Lügners, die in der Sprachphilosophie durch die Jahrhunderte hindurch brisant blieben. Sie werden mit eingearbeiteten logischen Verbaltexten im Schrifttyp LOGIK formuliert und markiert mit  $\Delta 1$ ,  $\Delta 2$ ,  $\Delta 3$  ... Diese Verbaltexte werden im Buch nach und nach alle syntaktisch präzisiert. Ganz am Schluss, nachdem die logische Universalsprache komplett definiert ist, wird der Dialogstoff zur Demonstration der logischen Grammatik logisch analysiert.

Wer sich nur für die rein formalen Fakten der logischen Sprache interessiert, kann diesen fiktiven Dialog mit eingewobenen historischen Fakten natürlich überspringen. Alles formal Wichtige wird in den anschließenden Kapiteln behandelt. Die logische Grammatik funktioniert in der Universalsprache auch ohne den Dialogstoff.

Dezember 2019

Wilfried Neumaier

# II

## VERBALE LOGIK

Ein Grammatik-Kalkül

nach Ideen von Leibniz und Peano

# Inhaltsverzeichnis

## II Verbale Logik

### II.1 Historische Verballogik-Konzepte

Platon:	Begriffszerlegung	191
Aristoteles:	partiell geregelte logische Verbalsprache	191
Chrysipp:	stereotype aussagenlogische Sprache	192
Petrus Hispanus:	traditionelle logische Verbalsprache	192
Leibniz:	logische Grammatik, Elimination der Flexion	193
	heuristische verbale Definitionen	194
	verbale logische Rohsprache	195
	definierte logische Verbalsprache	196
Boole:	verbale Klassensprache als Kommentarsprache	197
Frege:	radikaler Bruch zur Verbalsprache und Grammatik	198
Peano:	Formelsprache parallel zur Verbalsprache	200
	Linguistik: <i>Latino sine flexione</i>	202
	Derivationsgleichungen: <i>Algebra de Grammatica</i>	203

### II.2 Logische Grammatik

#### II.2.1 Verbale Syntax

Satzzeichen, Wörter, Formeln, verbale Texte	205
Grammatik-Ebenen, rohsprachliche Ebene	206
Kontexte, Scheinterme	207
Derivationen, Stammregeln, Stamm, Derivate	207
Gebundene Variablen, gebundene Texte, Skopus	209
Klammerrang	211
Übersetzungen, Verbalisierungen, Formalisierungen	212

#### II.2.2 Logische Wörter

Logische Wörter, Wortarten, Substantive, Adjektive etc.	213
Deklination, deklinationsunabhängige Sprache	214
Konjugation, Infinitiv, Plural, Person, Partizipien	215
Wortverschmelzungen	216

#### II.2.3 Logische Begriffe

Begriffe, begriffliche Texte, Attribute	217
Individualbegriffe, negierte Begriffe, Kontextbegriffe	218
Abstrakta, singularische Texte	220
Komposita	222

<b>II.2.4 Logische Prädikate</b>	
Prädikate, finites Verb, Prädikattypen, Standardprädikate	223
Symmetrische Prädikate, Pluralprädikate, reflexive Prädikate	224
Umgekehrte Prädikate, Passivprädikate	224
Negierte Prädikate	225
Kategorische Prädikate, verbale Subjekt- und Objektquantoren	225
Temporale Prädikate, Präsens, Futur, Perfekt	228
<b>II.2.5 Logischer Satzbau</b>	
Sätze, Hauptsätze, Satzformen, Konjunktionen, Satzreihen	229
Distributivsätze	231
Nebensätze, verschränkte Sätze	232
Bedingungssätze, Konsekutivsätze, Aussagesätze	233
Fragesätze, Relativsätze	234
<b>II.3 Grammatik-Anwendungen</b>	
<b>II.3.1 Verbale Universalsprache</b>	
Modellhafte oder axiomatische Spracherweiterungen	237
Universelle Mathematiksprache	238
Philosophische Universalsprache	239
<b>II.3.2 Dialektische Sprache</b>	
Sprechakte	241
Dialektische Axiome, Dialogaxiome, Dialogmodell	242
Ich- und Du-Sätze, Fragen und Antworten	243
<b>II.3.3 Paradoxe Sprache</b>	
Lügner-Paradoxon des Eubulides, Philosophen-Dialog	245
Philosophen-Modell	247
Kreter-Paradoxon, Sophistischer Dialog	248
Sophistische Modelle	249
<b>II.4.1 Calculemus im Grammatikkalkül</b>	251
<b>II.4.2 Calculemus im dialektischen Kalkül</b>	259