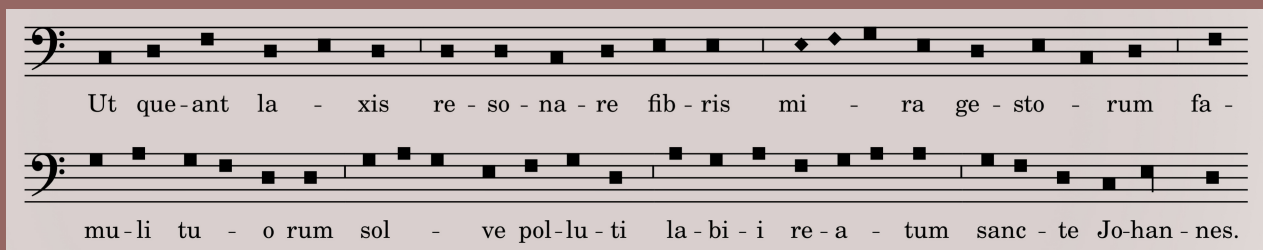
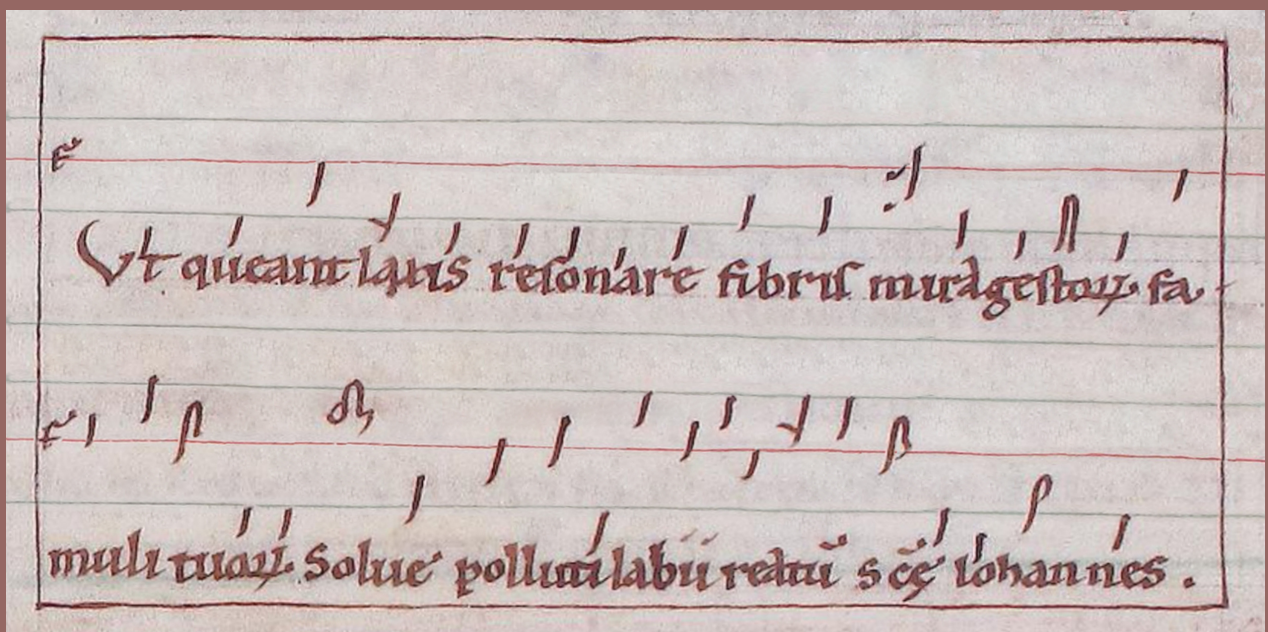


# UNSER NOTEN- UND TAKTSYSTEM



Heft 2  
Wilfried Neumaier  
November 2025

Musik-Mathematik  
kurz gefasst

Vor tausend Jahren begann die Entwicklung des Notensystems, als Guido von Arezzo um 1025 Notenlinien einführte. Er notierte auf ihnen Melodien in Neumen, etwa seine Melodie zur Einführung der Tonsilben ut, re, mi, fa, sol, la auf dem Titelbild; vorn auf der roten Linie steht der F-Schlüssel, das Urbild des Bassschlüssels; darunter seine Melodie in leichter lesbaren Quadratnoten  $\blacksquare \blacksquare \blacklozenge$ , die bald die Neumen ablösten. Guidos Liniensystem setzte sich sofort durch. Es ist im vorausgehenden Heft [UNSER HARMONISCHES TONSYSTEM](#) [H] in aktueller Form dargestellt. Die Tonhöhendimension ist also wohldefiniert:

- (1) Die **Tonhöhe** ist eine Abbildung, die **Tönen** einen Tonnamen des Liniensystems zuordnet.<sup>H2ff</sup>

In der mehrstimmigen Musik mit Neumen oder Quadratnoten war die Notendauer noch ungeregt. Um 1180 in der Notre-Dame-Epoche wurde sie geregelt durch rhythmische Muster (Modi), die Johannes de Garlandia um 1240 in seiner Schrift *De mensurabili musica* erklärte. Noten waren aber in verschiedenen Kontexten unterschiedlich lang. Die Drei- oder Zweiteilung der Longa  $\blacksquare$ , Brevis  $\blacksquare$  und Semibrevis  $\blacklozenge$  bis zur Minima  $\uparrow$  wurde um 1320 durch die *Ars nova* von Philipp de Vitry zur Regel. Sie galt auch noch, als im nächsten Jahrhundert weiße Noten  $\blacksquare, \blacksquare, \blacklozenge, \uparrow$  mit Unterteilungen  $\uparrow$  und  $\uparrow$  üblich wurden. Erst nach 1600 wurden diese Noten als feste Dauerzeichen konsequent durch schrittweise Halbierung definiert. Bei der späteren Stilisierung wurde aus der Semibrevis  $\blacklozenge$  die ganze Note  $\bullet$ , die heute die Einheit für die Dauer ist:

- (2) Die **Dauer** ist eine Abbildung, die Vielfache der ganzen Note  $\bullet$  zuordnet.

**Notenwerte und Pausenwerte** sind folgendermaßen definiert:

|                                               |                                    |                                                                               |
|-----------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $\blacksquare := 2\bullet$                    | $\text{—} := \bullet$              |                                                                               |
| $\text{♩} := \text{♪} := \frac{1}{2}\bullet$  | $\text{—} := \frac{1}{2}\text{—}$  | punktierte Werte $x$ :                                                        |
| $\text{♫} := \text{♬} := \frac{1}{4}\bullet$  | $\text{z} := \frac{1}{4}\text{—}$  | $x\cdot := x + \frac{1}{2}x$ $x\cdot\cdot := x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x$ |
| $\text{♮} := \text{♯} := \frac{1}{8}\bullet$  | $\text{v} := \frac{1}{8}\text{—}$  | gebundene Werte $x$ und $z$ :                                                 |
| $\text{♯} := \text{♯} := \frac{1}{16}\bullet$ | $\text{v} := \frac{1}{16}\text{—}$ | $x \text{ — } z := \widehat{xz} := x+z$                                       |
| $\text{♯} := \text{♯} := \frac{1}{32}\bullet$ | $\text{v} := \frac{1}{32}\text{—}$ |                                                                               |

In der Notenschrift werden Notenwerte ins Liniensystem gesetzt und kombiniert mit zugehörigen Tonnamen; bei Pausen ist die Lage auf den Notenlinien belanglos. Es werden also nur die Merkmale der Töne notiert, nämlich ihre Dauer und Tonhöhe oder bei Pausen nur die Dauer. Deshalb formalisiert man Noten am besten durch eine Liste ihrer Merkmale:

- (3) **Noten** werden formalisiert als Liste  $x=[x_1, \dots, x_n]$  mit dem Notenwert  $x_1$ .

Für Noten  $x=[x_1, x_2]$  mit Tonnamen  $x_2$  gilt  $\text{Tonhöhe}(x) := x_2$ .

**Pausen** sind Noten der Form  $x=[x_1]$  mit dem Merkmal  $\text{Dauer}(x) := x_1$ .

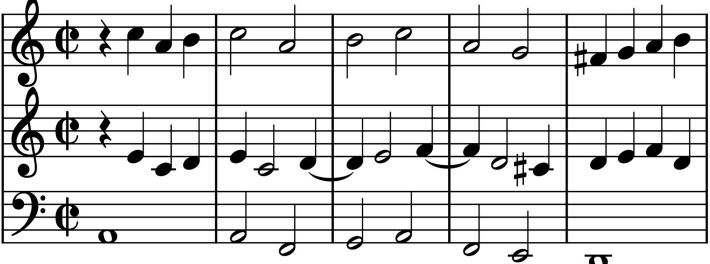
$x=[x_1, \dots, x_n]$  mit definiertem Merkmal  $M(x)$  wird als  $x_{[z]} := [x_1, \dots, x_n, z]$  erweitert mit Zusatzmerkmal  $\text{Zusatzmerkmal}(x_{[z]}) := z$  und vererbtem Merkmal  $M(x_{[z]}) := M(x)$ .

Speziell gilt dann:  $\text{Dauer}(x_{[z]}) := \text{Dauer}(x)$  und  $\text{Tonhöhe}(x_{[z]}) := \text{Tonhöhe}(x)$ .

Melodien entstehen durch Aneinanderreihen von Noten; deren Anfang und Ende lassen sich innerhalb einer Notenfolge bestimmen:

- (4) Für **Notenfolgen**  $l_1 \dots l_n$  gelten:  $\text{Notenzahl}(l_1 \dots l_n) := n$   
 $\text{Länge}(l_1 \dots l_n) := \text{Dauer}(l_1) + \dots + \text{Dauer}(l_n)$   
 $\text{Anfang}(l_1) := 0, \text{Anfang}(l_i) := \text{Länge}(l_1 \dots l_{i-1})$   
 $\text{Ende}(l_i) := \text{Anfang}(l_i) + \text{Dauer}(l_i)$

In der Notre-Dame-Zeit schrieb man Notenfolgen untereinander, ebenso Noten mit gleichem Anfang. Diese Partiturnotation wurde im 13. Jahrhundert unüblich, bis sie Samuel Scheidt 1624 in der *Tabulatura nova* wieder einführt:

(5)  Beispiel:  
 Samuel Scheidt, *Tabulatura nova*:  
 Vater unser im Himmelreich,  
 Versus 6

Formalisierung:

$$\begin{aligned} & [\text{c}'] [\text{a}'] [\text{h}'] [\text{c}'] [\text{a}'] [\text{h}'] [\text{c}'] [\text{a}'] [\text{g}'] [\text{fis}'] [\text{g}'] [\text{a}'] [\text{h}'] \\ & [\text{e}'] [\text{c}'] [\text{d}'] [\text{e}'] [\text{c}'] [\text{d}'] [\text{e}'] [\text{f}'] [\text{d}'] [\text{cis}'] [\text{d}'] [\text{e}'] [\text{f}'] [\text{d}'] \\ & [\text{o}, \text{a}^{-1}] [\text{a}^{-1}] [\text{f}^1] [\text{g}^{-1}] [\text{a}^{-1}] [\text{f}^1] [\text{e}^{-1}] [\text{o}, \text{d}^{-1}] \end{aligned}$$

- (6)  **$n$ -stimmige Sätze** sind Notenfolgen gleicher Länge vertikal notiert als  $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ .  
 $\text{Länge}(\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}) := \text{Länge}(A_1)$  und  $\text{Stimmzahl}(\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}) := n$

Für Notenfolgen  $A = l_1 \dots l_n$  und  $B = k_1 \dots k_m$  gilt die **Komposition**:

$AB := l_1 \dots l_n k_1 \dots k_m = (l_1 \dots l_n)(k_1 \dots k_m)$ . Sie ist übertragbar auf  $n$ -stimmige

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 \\ \vdots \\ A_n B_n \end{pmatrix}$$

**Wiederholungen** des Satzes  $X$  werden folgendermaßen notiert:

$$X^2 := ||:X:|| := XX \text{ und } X^n := ||:X:||^n := X^{n-1}X \text{ für } n > 2.$$

Wichtige Informationen stecken bei Sätzen in der Anordnung: die Position der Noten in der Notenfolge und die Schicht in der Stimmfolge. Will man auf einzelne Noten zugreifen, so sind sie durch diese Merkmale zu erweitern:

- (7) Als **Stimme** gilt die Menge der erweiterten Noten  $\{l_{1[1]}, \dots, l_{n[n]}\}$  einer Notenfolge  $l_1 \dots l_n$  mit der **Position** als Zusatzmerkmal.

Ein  **$n$ -stimmiges Musikstück** vereinigt die erweiterten Noten von  $n$  Stimmen gleicher Länge, wobei die  $m$ -te Note  $q_m$  der  $i$ -ten Stimme erweitert wird als  $q_{m[i]}$  mit der **Schicht** als Zusatzmerkmal.

- (8) Beispiel: Das Musikstück (5)<sub>Takt 1</sub> ist die Vereinigung folgender erweiterter Stimmen:

1. Stimme =  $\{\{\text{c}', 1, 1\}, [\text{c}', 2, 1], [\text{a}', 3, 1], [\text{h}', 4, 1]\}$
2. Stimme =  $\{\{\text{e}', 1, 2\}, [\text{c}', 2, 2], [\text{d}', 3, 2], [\text{f}', 4, 2]\}$
3. Stimme =  $\{\{\text{o}, \text{a}^{-1}, 1, 3\}\}$

Satz und Musikstück sind gleichwertige Darstellungen. Denn der mehrstimmige Satz kann aus einem mehrstimmigen Musikstück wieder rekonstruiert werden: Sortiere die Noten nach der Schicht, ordne sie nach der Position als Notenfolge, lasse in Notenformeln überall die zwei letzten Merkmale weg.

Oft schreiben Musiker auch mehrere Stimmen in ein Notensystem. Das Übersetzen solcher Notationsvarianten in die definierte Partiturnotation ist unproblematisch und muss hier nicht genauer präzisiert werden.

Neue Zeichen sind nur für halbierte Noten- und Pausenwerte definiert in (2). Eine Dreiteilung zeigen Triolen an, die aber nicht auf Einzelnoten wirken, sondern auf eine Zeichenfolge und dabei die Dauer ihrer Noten oder Pausen verkleinern, aber sonstige Merkmale nicht verändern. Solche merkmaltreuen Abbildungen lassen sich allgemein präzise definieren:

(9)  $\alpha$ -**treu** heißen Abbildungen  $f$  zwischen Musikstücken mit  $\alpha(x)=\alpha(f(x))$  für Abbildungen  $\alpha$ .

Als **Hauptmerkmale** von Musikstücken gelten die Abbildungen Dauer und Tonhöhe (3), Position und Schicht (7).

$\alpha$ -**Änderungen** sind  $\tau$ -treue Abbildungen für Hauptmerkmale  $\tau$  ungleich  $\alpha$ .

Positions- und schichttreue Abbildungen sind auf jede Notenfolge mehrstimmiger Sätze direkt anwendbar. Dazu gehören Daueränderungen wie Vergrößerungen und Verkleinerungen, die bei Triolen angewandt werden:

(10) Die Ver- $r$ -fachung  $v_r$  ist die Daueränderung, die die Dauer von Noten  $x$  stets mit  $r$  multipliziert:  $\text{Dauer}(v_r(x))=r \cdot \text{Dauer}(x)$ . Für Notenmengen  $M$  gilt die Abkürzung  $rM := v_r(M)$ .  $rM$  heißt  $r$ -fache **Verkleinerung** von  $M$  für  $r < 1$  und  $r$ -fache **Vergrößerung** von  $M$  für  $r > 1$ .

**Triolen:**  $\overset{\frown}{\underset{\frown}{M}}^3 := \overset{\frown}{\underset{\frown}{M}}_3 := \frac{2}{3}M$  für Notenmengen  $M$ .

**$n$ -olen:**  $\overset{\frown}{\underset{\frown}{M}}^n := \overset{\frown}{\underset{\frown}{M}}_n := \frac{2^p}{n}M$  mit  $p = \text{Maximum}\{m \in \mathbb{N} | 2^m < n\}$ .

(11) Beispiel: Johannes Brahms 2. Klavierkonzert, Hauptthema:



Hier haben Achtelnoten Balken statt Fähnchen; auch diese Notationsvariante wird hier nicht präzisiert. Andere Angaben dienen zur Interpretation der Noten. Das am Anfang genannte Instrument bestimmt die **Klangfarbe** der Stimme. Sie wird mitunter geändert durch Vermerk der Spielweise, bei Streichern etwa *arco* oder *pizz.* Singstimmen liegen vor, wenn Noten durch Silben erweitert werden wie im Titelbild, formal ginge das nach (3). Die **Lautstärke** wird oft nicht notiert oder nur grob abgestuft als  $ppp < pp < p < mp < mf < f < ff < fff$ . Die Zeichen  $\text{<}$  und  $\text{>}$  signalisieren Änderungen der Lautstärke, die Musiker nach eigenem Ermessen interpretieren. Auch die **Artikulation** kann variieren. *Stac-*

*cato*-Noten  $\dot{x}$  oder  $\dot{x}$  verkürzt man und gleicht dies aus durch eine Mini-Pause, so dass der Notenwert  $x$  die Gesamtdauer ist. Das erspart ein kompliziertes exakt notiertes Notenbild. Im Brahms-Thema zeigen Bögen die Artikulation *legato* an mit unverkürzten Noten und Bögen über Staccato-Noten die Artikulation *non legato*, die zwischen *staccato* und *legato* liegt.

Noten können zudem mit unterschiedlichem **Tempo** gespielt werden. Erst eine Tempoangabe koppelt ihre Dauer an die Uhrzeit. Intuitive Tempi wie Adagio, Andante, Allegro lassen viel Ermessensspielraum. Seit 1815 werden sie mit dem Metronom genormt durch grobe Richtwerte: Adagio $\approx$ 60, Andante $\approx$ 100, Allegro $\approx$ 120. Das Allegro non troppo  $\text{♩}=92$  im Brahms-Thema gibt aber keine Dauer an, wie die Gleichung suggeriert, sondern Schläge pro Minute. Die Dauer ist der reziproke Wert: Das Tempo  $x=n$  bedeutet  $x=\frac{60}{n}\text{sec}$  und das Tempo  $\text{♩}=92$  bei Brahms somit  $\text{♩}=\frac{60}{92}\text{sec}\approx 0,65\text{sec}$ . Musiker spielen aber nie stur im Metronomtakt, sondern wählen das Tempo flexibel und deuten durch *ritardando*, *accelerando* oder *a tempo* Tempowechsel an. Im Brahms-Konzert bestimmt ein Dirigent das Tempo, das Metrum, den Takt, den Rhythmus.

Die Definition des Rhythmus als Dauernfolge (χρόνων τάξις) stammt aus den *Rhythmischen Elementen* des antiken Musik-Mathematiker Aristoxenos um 330 v. Chr,<sup>R34</sup> besprochen im Buch *Antike Rhythmustheorien* [R]. Er beschrieb dort auch dreischichtige Rhythmusbildungen mit Silben, Tönen und Bewegungsfiguren.<sup>R42</sup> Abstrahiert man von solchen Merkmalen, dann lässt sich der Rhythmus beliebig komplexer Musikstücke bestimmen:

- (12) Ein  **$n$ -schichtiger Rhythmus** ist ein  $n$ -stimmiger Satz, dessen Noten nur das Merkmal Dauer haben; sie haben die Form  $[y]$  und werden als  $y$  notiert, so dass jede Rhythmus-Stimme als Dauernfolge erscheint.

**Rhythmus**( $x$ ) := [Dauer( $x$ ), Position( $x$ ), Schicht( $x$ )] für Noten  $x$  von Musikstücken definiert eine dauer-, positions- und schichttreue Abbildung; sie bildet jedes Musikstück auf ein zweites ab; notiert als Satz wird es zum ein- oder mehrschichtigen Rhythmus.

- [illegible]

[illegible]

Bei komplexen Rhythmen überlagern sich verschiedene rhythmische Schichten und erzeugen einen komplementären Gesamtrhythmus, der sich ebenfalls genau bestimmen lässt:

- (14) Ordnet man alle Noten-Enden eines Musikstücks  $M$  als  $e_n > \dots > e_1$  und setzt  $e_0 := 0$ , dann gilt  $[e_1 - e_0] \dots [e_n - e_{n-1}]$  als **Komplementär-Rhythmus** von  $M$ .

- (15) Beispiel: Der Komplementär-Rhythmus von (5) lautet  $\parallel : \bullet \bullet \bullet \bullet : \overset{5}{\parallel}$

Aristoxenos bezog auch den Sprachrhythmus aus der Dichtung ein. Seit Homer war der Hexameter  $-uu-uu-uu-uu-uu-uu$  der wichtigste Versrhythmus mit langen Silben  $-$  und halb so langen kurzen Silben  $u$ .<sup>R25+30</sup> Der Daktylos  $-uu$ , das Maß oder Metrum, konnte in Versen durch den Spondeus  $--$  ersetzt werden; der Hexameter wurde also als Maßband an variable Verse angelegt. Das Messen ist hier das gedankliche Wiederholen des Metrums parallel zu einem Satz; formal beschrieben ist es ein mehrschichtiger Satz:

- (16) Ein Rhythmus  $T$ , bei dem aus  $T=X^m$  stets  $m=1$  folgt, gilt als **Metrum** und ein mehrstimmiger Satz  $\overset{S}{T}^n$  als **Satz im Metrum  $T$** .

Sechs antike Metren, nämlich  $-u$ ,  $u-$ ,  $-uu$ ,  $uu-$ ,  $--$  und  $uuu$ ,<sup>R56</sup> lagen den rhythmischen Modi der mehrstimmigen Musik der Notre-Dame-Epoche zugrunde. In der *Ars nova* um 1320 ging Philipp de Vitry von solchen Metren mit Längen und Kürzen über zu Mensuren mit gleichmäßiger Drei- oder Zweiteilung der Noten. Sein Prinzip ist allgemein definierbar, ebenso seine Mensurvorgezeichnung, die ein parallel wiederholtes Metrum symbolisiert; beides ist auch bei heutigen Takten üblich:

- (17)  $n$ -teilung( $x$ )  $:= 1/n(x^n)$  für Sätze  $x$

**Mensuren** sind mehrschichtige Metren, deren erster Rhythmus ein Notenwert ist und deren  $i$ -te Schicht stets eine Zwei- oder Dreiteilung der darüber liegenden Schicht  $i-1$  ist.

Für Sätze  $\overset{S}{T}^n$  im Metrum  $T$  gilt die **Taktvorgezeichnung**  $\overline{\overline{T}}S := \overset{S}{T}^n$ , für Sätze  $\overline{\overline{T}}S$  gilt daher **Taktzahl**( $S$ )  $:= \text{Länge}(S)/\text{Länge}(T)$ .

Lange wurde nur die Mensur vorgezeichnet; beim Lesen ging daher leicht die Orientierung verloren. Später beseitigte man dieses Leseproblem durch eingefügte Taktstriche, die das wiederholte Metrum markieren:

- (18) Für Mensuren  $T$  wird der **Taktstrich**  $|T := T$  definiert. Somit gilt für  $T$ :

$T|T=TT$ ,  $T|T|T=TTT$ ,  $T|T|T|T=TTTT$  etc. Bei Sätzen  $\overline{\overline{T}}S$  kann der Taktstrich in den parallelen Satz  $S$  übertragen werden.

Als nach 1600 die Noten eindeutig definiert wurden, blieben von den alten Mensuren nur die geradzahligen Mensuren C und  $\mathbb{C}$  übrig. Sie sehen in aktuellen Notenwerten so aus:

- (19) tempus imperfectum C : tempus imperfectum diminutum  $\mathbb{C} := 1/2C$ :



$\mathbb{C}$  wurde später stilisiert als  $\mathbb{C}$  in der originalen Bedeutung als Zwei-Halbe-Takt. C wurde stilisiert als  $\mathbb{C}$ , jedoch verkleinert als Viervierteltakt wie im Brahms-Thema (11) oder in Bachs Präludium (25). Takte mit Dreiteilungen waren nach wie vor möglich, wurden aber umgeschrieben in definierte Noten:

- (20) Der  **$z$ - $n$ -tel-Takt** kurz  $\frac{z}{n}$  ist die Mensur mit  $\frac{1}{4} < \frac{z}{n} \leq \frac{3}{2}$  und kürzester Note  $\wp$  und einer Stimme mit  $z$ -facher Wiederholung von  $\frac{1}{n}\circ$  laut (2), die eine Dreiteilung der darüber liegenden Stimme ist, falls 3 ein Teiler von  $z$  ist.

Eine Tabelle listet die möglichen Takte auf. Anschließend werden sie explizit angegeben und nach der Länge sortiert, damit der Unterschied sichtbar wird:

(21)

| $\frac{z}{n}$ | 2             | 3             | 4             | 6              | 8              | 9              | 12              | 16              | 18 | 24              | mögliche $z$ - $n$ -tel-Takte                                                                                                                                                           |
|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2             | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |               |                |                |                |                 |                 |    |                 | Graue Felder: zu große oder zu kleine Takte.<br>Grüne Takte sind identisch mit $\frac{2}{4}$ oder $\frac{4}{4}$ .<br>Leerfeld: $\frac{18}{16}$ ist keine eindeutige Takt-Kennzeichnung! |
| 4             | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{6}{4}$  |                |                |                 |                 |    |                 |                                                                                                                                                                                         |
| 8             |               | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{6}{8}$  | $\frac{8}{8}$  | $\frac{9}{8}$  | $\frac{12}{8}$  |                 |    |                 |                                                                                                                                                                                         |
| 16            |               |               |               | $\frac{6}{16}$ | $\frac{8}{16}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{12}{16}$ | $\frac{16}{16}$ |    | $\frac{24}{16}$ |                                                                                                                                                                                         |

$\frac{3}{2} =$

$\frac{6}{4} =$

$\frac{12}{8} =$

$\frac{24}{16} =$

$\frac{9}{8} =$

$\mathbb{C} := \frac{4}{4} =$

$= \frac{8}{8} = \frac{16}{16} = \mathbb{C} := \frac{2}{2}$

$\frac{3}{4} =$

$\frac{6}{8} =$

$\frac{12}{16} =$

$\frac{9}{16} =$

$\frac{2}{4} =$

$= \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$

$\frac{3}{8} =$

$\frac{6}{16} =$

Eine berühmte Mustersammlung für dieses Taktsystem ist *Das Wohltemperierte Klavier* von Bach mit zwei Serien von Präludien und Fugen in allen Tonarten; dort kommen alle definierten Takte vor bis auf den  $\frac{9}{16}$ -Takt:

(22) Takte im *Wohltemperierten Klavier* von Johann Sebastian Bach

| $\frac{3}{2}$    | $\frac{6}{4}$ | $\frac{12}{8}$  | $\frac{24}{16}$ | $\frac{9}{8}$  | $\frac{3}{2}$                                                     | $\frac{C}{4}$        | $\frac{3}{4}$                                                              | $\frac{6}{8}$  | $\frac{12}{16}$ | $\frac{2}{4}$               | $\frac{3}{8}$               | $\frac{6}{16}$ |
|------------------|---------------|-----------------|-----------------|----------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------|
| I P8             | I P4<br>I F14 | I P9<br>I P11   | I P15           | I F19<br>I P20 | I F4<br>I F22                                                     | oft:<br>25 P<br>22 F | I F6<br>I P10<br>I P17<br>I F21                                            | I F15<br>I P18 | I P13           |                             | I P3<br>I F11*              |                |
| II P11<br>II F22 |               | II P5<br>II P19 |                 | II P4<br>II P8 | II F5<br>II F7<br>II F9<br>II F10*<br>II F13*<br>II P22<br>II F23 |                      | II P6<br>II P9<br>II P13<br>II P14<br>II P15<br>II F16<br>II P17<br>II F21 | II F18         | II F4<br>II P21 | II F1<br>II P12*<br>II F12* | II P10<br>II F15<br>II F24* | II F11         |

P=Präludium, F=Fuge, \*auftaktige Stücke

Dirigenten geben den Takt durch den Schlag der Hand an. Schlagfiguren waren seit je her Auf und Ab. Schon Aristoxenos beschrieb damit Metren,<sup>R42</sup> und Augustinus sprach in *De musica* von der Hebung und Senkung der Hand.<sup>R88f</sup> Mit  $\uparrow$  := Auf und  $\downarrow$  := Ab ergibt sich ein Zweiertakt  $\downarrow\uparrow$ . Mit seitlichen Schlägen  $\rightarrow$  := rechts und  $\leftarrow$  := links entsteht der Dreivierteltakt  $\downarrow\rightarrow\uparrow$  und der Viervierteltakt  $\downarrow\leftarrow\rightarrow\uparrow$ . Stets betont ein Ab den Taktanfang, andere Schläge sind weniger betont. Eine noch stärker differenzierte gewichtete Betonung kann in Mensuren und Takten quantitativ präzise definiert werden:

(23) Für und Noten  $x$  von Sätzen  $\overline{TS}$  mit Taktzahl( $S$ )= $s$  gilt:

**Gewicht**( $x$ ) := Zahl der Noten  $y$  von  $T^s$  mit Anfang( $x$ )=Anfang( $y$ )

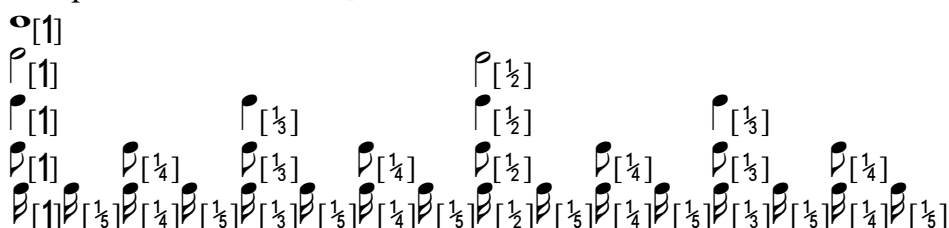
**Betonung**( $x$ ) :=  $\frac{1}{1+\text{Stimmzahl}(T)-\text{Gewicht}(x)}$

**Akzentuiertes**  $M$  heißt die Menge erweiterter Noten  $x_{[\text{Betonung}(x)]}$  mit dem **Akzent** als Zusatzmerkmal für Noten  $x$  aus  $M$ .

$x$  ist betonter als  $y$  :=  $x$  ist schwerer als  $y$  :=  $\text{Betonung}(x) > \text{Betonung}(y)$

$x$  ist leichter als  $y$  :=  $y$  ist schwerer als  $x$

(24) Beispiel: Akzentuierter  $\frac{4}{4}$ -Takt:



Die Betonung im Takt hängt natürlich zusammen mit parallelen Musikstücken, denn sie lässt sich auf unterschiedliche Weise musikalisch realisieren: Mit dem **Längenakzent** länger = betonter hängt die Betonungsdefinition zusammen. Ein **Lautstärkenakzent** mit lauter = betonter wirkt hörbar. In Melodien erzeugt der **Höhenakzent** die Wirkung höher = betonter, im Bass dagegen erzeugt der **Tiefenakzent** den Eindruck tiefer = betonter. Ein Musterbeispiel für die Kombination des Höhen- und Tiefenakzents ist folgendes Präludium von Bach:

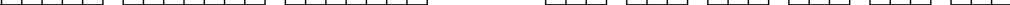
- 

sonst lauter Tiefenakzente gegenüber Nachbarnoten

(26) Eine **Synkope** in Sätzen  $\overline{\underline{T}}S$  ist eine Bindung  $\widehat{x}z$ , bei der  $x$  leichter als  $z$  ist. Die Synkope  $\widehat{x}z$  ist umrechenbar in eine längere Note laut (2).

- (27) Beispiel: (5) 2. Stimme: Synkopenkette mit Akzenten markiert:

**Betonung:** 1  $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$  1  $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$  1  $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$  1  $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$  1  $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$

(28) 

(28)

Figure 28 displays 15 musical staves, each representing a different time signature. The staves are arranged in five rows. The first row contains 3/2 and 6/4. The second row contains 12/8 and 24/16. The third row contains 9/8, 3/2, and 4/4. The fourth row contains 3/4, 6/8, and 12/16. The fifth row contains 9/16, 2/4, 3/8, and 6/16. Each staff shows a sequence of eighth notes, with some staves having a fermata over the final note.

Offenbar ist aus der Kurzform der Takt wieder rekonstruierbar: Man bindet die Notenwerte mit minimaler Betonung an die vorausgehende betontere Note und übernimmt deren Betonung und erhält die nächsthöhere Schicht. Dieser Vorgang wird so oft wie möglich wiederholt. Der Rhythmus der erzeugten Schich-

ten ergibt den Takt. Offenbar ist also die Betonung im Takt identisch mit dem Akzent in der Kurzform. Letztere wird in der Präzisierung von der Mensur mit indiziertem Akzent  $\text{>}$  unterschieden:

- (29)  $T_{>} :=$  akzentuierter Komplementär-Rhythmus der Mensur  $T$ .

Für Noten  $x$  von Sätzen  $\overline{\underline{T}}S$  mit  $\text{Taktzahl}(S)=s$  gilt für  $y$  aus  $T_{>}^s$  mit  $\text{Anfang}(x)=\text{Anfang}(y)$  offenbar:  $\text{Betonung}(x)=\text{Akzent}(y)$ .

Über diese akzentuierten Metren lassen sich auch auftaktige Metren definieren. In der alten Musik galt ausnahmslos die Volltaktigkeit, denn Mensuren sind unzerlegbar und besitzen keinen weniger betonten Taktteil als Auftakt. Noch im *Wohltemperierten Klavier* beginnen fast alle Stücke volltaktig: Im ersten Teil gibt es nur eine Ausnahme und im zweiten nur fünf (22). Solche auftaktigen Musikstücke richten ihre Akzente nach auftaktigen Metren, die durch zyklische Permutationen akzentuierter Metren gewonnen werden:

- (30) **Volltaktig** heißen akzentuierte Komplementär-Rhythmen  $T_>$  laut (29).

**Auftaktig** heißt ein Metrum  $AB$ , falls  $BA$  volltaktig ist; der Taktstrich wird hier in die Mitte gesetzt  $A|B := AB$  und  $A$  heißt dann der **Auftakt** von  $A|B$ .

Die definierten Taktarten blieben auch für spätere Epochen maßgeblich. Nur selten trifft man andere Taktarten an, die zwei Metren zusammensetzen zu einem neuen Metrum, das die Definition erfüllt (16). Beispiele aus der antiken Metrik von Dionysios Thrax sind der Paion  $\text{—}\cup\cup\cup$  und der Epitritos  $\text{—}\text{—}\text{—}\cup$  und deren zyklische Permutationen.<sup>R56</sup> Es sind Vorläufer von Fünfer- und Siebener-takten, die einen regelmäßigen Taktwechsel (ohne Taktstrich) erzeugen. Zwei prominente Beispiele führen das vor Augen:

- (31) Beispiel: Tschaikowky 6. Sinfonie, Satz 2 im  $\frac{5}{4}$ -Takt =  $\frac{2}{4} \frac{3}{4}$ , regulär akzentuiert:

*mf* *mf* *f*

Betonung: 1 ½ 1 ⅓ ⅓ ½ ½ 1 ½ 1 1 ½ 1 ⅓ ⅓ ½ ½ 1 ½ 1

Lautstärkeakzente: > > > > >

Längenakzente: > > > > >

Höhenakzente: > > > > >

- (32) Beispiel: Bartok *Mikrokosmos* 113 im  $\frac{7}{8}$ -Takt =  $\frac{4}{8} \frac{3}{8}$ , Ostinato im Höhenakzent:

[illegible]

Weil ein Achtelschlag zu hektisch beim Dirigieren wäre, ist es besser, diesen Siebenachteltakt wie einen Dreiertakt  $\downarrow \rightarrow \uparrow$  mit gedehntem  $\frac{3}{8}$ -Auftakt zu schlagen. Beim entsprechenden Vierertakt  $\downarrow \leftarrow \rightarrow \uparrow$  mit gedehntem  $\frac{3}{8}$ -Auftakt entsteht quasi ein  $\frac{9}{8}$ -Takt im Metrum  $\frac{3}{4}\frac{3}{8}$  wie im folgenden Beispiel:

Psalm 98 aus dem Singspiel *Mose* [M]

Sin - get dem Herrn ein Lied, denn er tut  
 Er denkt an sei - ne Gunst und sei - ne  
 Jauch - zet vor Gott, dem Herrn, ihr Völ - ker  
 Das Meer und die da - rin schwimmen und  
 Wenn Chris - tus kommt, um den Erd - ball zu

+Pauken (es, B) + Schellentamburin

Wun - der. Mit sei - ner Rech - ten schafft er uns das Heil. Sei - ne Ge -  
 Treu - e zu sei - nem Bun - des - volk, neu o - der alt; an die - sem  
 al - le, freut euch und ju - belt, ja freut euch und singt, auf In - stru -  
 schwe - ben, ihr Lob soll brau - ßen wie Bran - dung am Strand. Der gan - ze  
 rich - ten, er - klingt im Ju - bel - chor dies neu - e Lied. Er wird den

rech - tig - keit be - weist er un - ter den vie - len Völ - kern in je - dem Erd - teil.  
 Volk sieht die Welt bald das neu - e gött - li - che Heil in voll - kommner Ge - stalt.  
 men - ten spielt mit gro - ßem Schal - le, dass es zum Herrn, un - serm Kö - nig hin - dringt:  
 Erd - ball und die da - rauf le - ben, Flüs - se und Ber - ge klatscht laut in die Hand:  
 Streit in der Völ - ker - welt schlich - ten, dass nur, was recht ist und gut ist, ge - schieht.

Du bist mein Gott, mein Herr und meine Stär - ke, du bist mein Ret - ter ich rühm deine Wer - ke.

## Literatur

- [R] Neumaier, W.: *Antike Rhythmustheorien*. Historische Form und aktuelle Substanz, Amsterdam 1989.
- [M] Neumaier, W.: *Mose*. Singspiel, 1993. Strube Verlag München Edition 1311.
- [H] Neumaier, W.: *Unser harmonisches Tonsystem, Musik-Mathematik kurz gefasst*, Heft 1, 2025, Download:  
[www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft](http://www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft)



## Historische Quellen

- Aristoxenos: *Rhythmische Elemente*, um 330 v.Chr.  
 zu seiner Rhythmik: [R] S.33-53
- Augustinus: *De musica*, um 378.  
 zu seiner Rhythmik: [R] S.79-105
- Dionysios Thrax: *Techne grammatike*, 2.Jh.v.Chr.  
 zu seiner Metrik: [R] S.27ff+55ff
- Guido von Arezzo, *Epistula de inveniando ignotu cantu*, um 1030. Faksimile online:  
<https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/item/HJJ7B33HUUF- FIPLHSRGJKPAT4THNAXEW>
- Johannes de Garlandia: *De mensurabili musica*, um 1240.
- Philipp de Vitry: *Ars nova*, um 1322.
- Scheidt, Samuel: *Tabulatura nova*, Hamburg 1624.  
 Faksimile des Notenbeispiels online:  
[https://sachsen.digital/werkansicht?tx\\_dlf\[id\]=8616&tx\\_dlf\[page\]=63](https://sachsen.digital/werkansicht?tx_dlf[id]=8616&tx_dlf[page]=63)
- Titelbild: Guidos Melodie in Neumen, in: Guido von Arezzo, *Epistula de inveniando ignotu cantu* S. 97r. Faksimile siehe oben (Public domain: CCO 1.0 Universal).  
 Das Faksimile hat dort undeutliche Notenlinien, die im Titelbild an die Notenlinien auf S. 97v. angeglichen wurden.