KOMPLEMENTÄRE MENGENLOGIK

Wilfried Neumaier
Juni 2023/26

Hierarchien in Peanos Welt

KOMPLEMENTÄRE MENGENLOGIK
Hierarchien in Peanos Welt

Wilfried Neumaier

Juni 2023/26

www: https://neumaier-wilfried.de/logik

Inhalt

1 Explizit definierte logische Sprache 1
Basisterme
Standard-Definitionen $a:=b$
2 Logik 2
3 Klassische Logik 3
4 Identitätslogik mit Aussagen-Teillogik 4
5 Klassenlogik 5
6 Definierte Prädikatenlogik 6
explizit definierte Quantoren
7 Definierte Relationslogik mit Funktionen 7
8 Definierte Mengenlogiken 9
Leibniz: binäre Mengenlogik
Peano: komplementäre Mengenlogik
explizite Mengendefinition, ableitbare Cantor-Mengenlehre 10
explizite Ordinalzahldefinition 11
9 Explizite rekursive Definitionen 12
10 Hierarchien 14
Potenzvariante
explizit definierte Klassenränge 17
kumulative Hierarchien 19
Neumanns Mengenhierarchie, reguläre Hierarchien 21
Wahrheitshierarchie 23
Multiversum eingebettet ins transzendente Universum 24
Referenzen 25

1 Explizit definierte logische Sprache

Giuseppe Peano publizierte als erster Mathematiker streng formalisierte Logikkalküle in einer leicht verbalisierbaren Symbolsprache, bei der er Wörter durch ihre Initialen abkürzte [6][7]. Wegen angeblicher Antinomien setzte sich seine Logik aber nicht durch. Tatsächlich sind seine Logikkalküle jedoch konsistent und sehr effizient. Das zeigt ihre Aktualisierung in der *Universallogik* [4]. Seine Logik in der Tradition nach Aristoteles, Leibniz und Boole hat eine natürliche, sehr einfache Syntax für Terme, zu denen Begriffe und Aussagen zählen. **Basisterme** sind die Identität, die Konjunktion, die Negation, das Universum und Klassenterme, jeweils mit definierter Verbalisierung:

Definitionen:

A IST IDENTISCH MIT $B := (A{=}B)$	*Identität*
A UND $B := A{\cdot}B$	*Konjunktion*
NICHT-$A := \neg A$	*Negation*
EXISTENT $:= \mathsf{I}$	*Universum*
x MIT $f_x := \{x \mid f_x\}$	*Klassenterm*

Freie Variablen für alle Terme werden stets groß geschrieben.
Gebundene Variablen werden stets klein geschrieben wie x in f_x .

Diese Basisterme erzeugen eine außerordentlich leistungsfähige logische Sprache, und zwar ausschließlich mit **Standard-Definitionen** $a{:=}b$, die neue Terme a durch bekannte Terme b erklären. Die ganze Mathematiksprache wird in dieser expliziten Form definiert, denn Peanos Logik schließt die Mengenlehre ein und damit das derzeitige Fundament der Mathematik. Speziell wird Neumanns Mengenhierarchie, die bisher immer implizit rekursiv definiert wurde, hier auch explizit definiert. Sie umfasst bekanntlich alle Mengen der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre. In Peanos komplementärer Mengenlogik existieren aber wesentlich mehr Klassen. Hier können ganz andere Hierarchien als alternative mögliche Welten auf analoge Weise explizit definiert werden.

Der Sprachaufbau wird in den folgenden Abschnitten referiert. Jeder Abschnitt präsentiert eine logische Sprachebene der *Universallogik* mit wenigen kurzen Axiomen. Insgesamt genügen zwölf Axiome, aus denen alle mathematischen Theoreme folgen. Aus der *Universallogik* werden nur Theoreme zitiert, die anschließend zur Beschreibung der Hierarchien nötig sind, wobei [...] die Seite des Beweises am Rand angibt. Quellen zu historischen Bemerkungen sind auch in diesem Buch zu finden.

2 Logik

Aristoteles begründete die Logik und nannte sie Beweiswissenschaft. Er führte erstsmals Schlussregeln ein. Sie werden hier präzisiert mit Ableitungsoperatoren $\vdash$ und $\dashv\vdash$, die in logischen Texten nicht vorkommen.

$a \vdash b$ bedeutet: Ist (jedes) a beweisbar, dann ist auch (jedes) b beweisbar.
$a \dashv\vdash b$ steht für die Regeln $a \vdash b$ und $b \vdash a$.
Metavariablen für Texte haben Serifen (logische Variablen dagegen nicht).

Zwei Schlussregeln von Aristoteles sind grundlegend. Darunter ist der *modus ponens*, der aber nicht die Implikation heutiger Aussagenkalküle verwendet, sondern eine algebraische Implikation, die Leibniz zuerst genau definierte:

Definition:
$(A \Rightarrow B) := (A = A \cdot B)$

Axiome:

$a, a \Rightarrow b \vdash b$	*modus ponens*	A1	[38]
$a \vdash a = \mathsf{I}$	*Urteil*	A2	[36]

Zur Logik gehört auch ein Identitätsaxiom sowie drei Konjunktionsaxiome, die ein multiplikatives idempotentes Monoid beschreiben, das formal der Zusammensetzung von Begriffen der natürlichen Sprache entspricht:

Definitionen:
$A \cdot B \cdot C := (A \cdot B) \cdot C$
$A \cdot B \cdot C \cdot D := (A \cdot B \cdot C) \cdot D$ etc.
$A_1 \ldots A_n\ N := (A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot N)$ für definierte Adjektive $A_1 \ldots A_n$ und Nomen N

Axiome:

$(A = B) \Rightarrow (xAy \Rightarrow xBy)$	*Identitätsaxiom*	A3	[38]
$\mathsf{I} \cdot A = A$	*neutral*	A4	[36]
$A \cdot A = A$	*idempotent*	A5	[36]
$A \cdot B \cdot C = A \cdot C \cdot B$	*permutativ*	A6	[36]

Diese sechs einfachen Logikaxiome genügen, um alle wichtigen Beweisverfahren abzuleiten, da Schlussregeln, Gleichungen und Implikationen die wesentliche Argumente in Beweisen sind. Die Beweistechnik wird auf vier Seiten der Universallogik [115-118] benutzerfreundlich beschrieben. Sie erlaubt präzise Kalkülbeweise, die üblichen informellen Beweisen entsprechen. Es sind stets lineare Ableitungen als Folge von Termen, zwischen denen Argumente als Indizes eingefügt werden.

Folgende Erklärungen zur Argumentationsweise mögen hier genügen:

- Axiome und Theoreme werden mit ihrem $_{Namen}$ zitiert, Definitionen mit $_{def}$, unterscheidbar am Zeichen, das eliminiert oder eingeführt wird.
- Hypothesen eines Theoreme werden markiert mit $_{hyp,\ hyp1,\ hyp2}\ \cdot$
- Faktoren bewiesener Terme sind gültig (ihr Produkt ist eine Konjunktion); das gilt auch für den Skopus eines Quantors.
- Unterstrichene Faktoren werden der Reihe nach zitiert als $_{U,\ U1,\ U2,\ ...}\cdot$
- $_{-Name}$ zeigt das Weglassen eines Faktors an.
- $_{+Name}$ zeigt das Einfügen eines Faktors an.
- $_{>Name}$ zeigt die Anwendung eines Faktors auf einen Term namens $_{Name}$ an.
- $_{B}$ zeigt automatische Beweisschritte in der Booleschen Algebra an, die hier nicht ausgeführt werden.

3 Klassische Logik

Zur klassischen Logik gehört auch die Negation. Mit ihr und der Konjunktion sind alle anderen klassischen Operatoren definierbar. Alle sind für Terme und Aussagen verwendbar, oft werden aber spezielle Symbole und Verbalisierungen gewählt:

Definitionen für Terme und Klassen:	für Aussagen:
WESEN $:=$ DING $:= \mathsf{I}$	JA $:= \mathsf{I}$
$0 := \neg\mathsf{I}$	NEIN $:= 0$
A GESCHNITTEN MIT $B := A{\cap}B := A{\cdot}B$	$A{\wedge}B := A{\cdot}B$
A VEREINT MIT $B := A{\cup}B := \neg(\neg A{\cdot}\neg B)$	A ODER $B := A{\vee}B := \neg(\neg A{\cdot}\neg B)$
A OHNE $B := A{\setminus}B := A{\cdot}\neg B$	
ALLE A SIND $B := A{\subseteq}B := (A{=}A{\cdot}B)$	A IMPLIZIERT $B := (A{\Rightarrow}B)$
A IST VERSCHIEDEN VON $B := A{\neq}B := \neg(A{=}B)$	
$A{\subset}B := (A{\subseteq}B){\cdot}(A{\neq}B)$	

Leibniz charakterisierte die Negation effektiv und elegant durch ein Implikationssynonym, das die logischen Axiome ergänzt:

Axiom:

$(A{=}A{\cdot}B) = (A{\cdot}\neg B{=}0)$ *Negationsregel* A7 [49]

Aus den Axiomen A1-A7 folgen die Regeln klassischer Aussagenkalküle [2] und der booleschen Algebra. Wie Boole kann man somit klassische Theoreme über Terme oder Aussagen automatisch beweisen [127]. Dazu gehören *indirekte* Beweise, Beweise mit *Kontraposition*, *ex falso quodlibet*, *reflexiv* oder anderen bekannten Regeln, die hier ohne ausdrückliches Zitat angewandt werden.

4 Identitätslogik mit Aussagen-Teillogik

Logiker bis hin zu Boole verwendeten Gleichungen und Implikationen nur als Regeln, noch nicht als vollwertige Terme, die in alle Variablen einsetzbar sind. Leibniz war der erste, der dies tat. Zwei seiner Regeln garantieren eine effektive Identitätslogik:

Axiome:

$(A{\neq}B) = ((A{=}B){=}0)$	*Inkoinzidenz*	A8	[49]
$(A{\Rightarrow}B){\cdot}A \Rightarrow B$	*Ersetzregel*	A9	[49]

Theoreme:

$(A{=}B) \Rightarrow (xAy{=}xBy)$	*kongruent*	[128]
$(A{=}B){\cdot}xAy = (A{=}B){\cdot}xBy$	*Tausch*	[128]
$(A{\vee}B){\cdot}(B{\Rightarrow}C) \Rightarrow A{\vee}C$	*disjunktiv*	[129]
$A{\subseteq}A$	*reflexiv*	[130]
$(A{\subseteq}B){\cdot}(B{\subseteq}A){=}(A{=}C)$	*antisymmetrisch*	[131]
$(A{\subseteq}B){\cdot}(B{\subseteq}C){\Rightarrow}(A{\subseteq}C)$	*transitiv*	[130]
$(A{\subset}B){\cdot}(B{\subset}C){\Rightarrow}(A{\subset}C)$	*transitiv*	[131]
$(A{\subset}B){\cdot}(B{\subseteq}C){\Rightarrow}(A{\subset}C)$	*transitiv*	[131]
$0{\subseteq}A \qquad A{\subseteq}\mathsf{I}$	*extrem*	[131]
$A{\cdot}B{\subseteq}A, \quad A{\subseteq}A{\cup}B$	*Oberterm*	[130f]
$(A{\subseteq}C){\cdot}(B{\subseteq}C) = (A{\cup}B){\subseteq}C$	*Teilsumme*	[131]

Da Leibniz nichts über Logik veröffentlichte, blieben seine brillanten Ideen fruchtlos, insbesondere seine intelligente Einbettung der Aussagenlogik in die Termlogik durch die Aussagenregel $p{=}(p{=}\mathsf{I})$. Sie macht Syntaxkonstruktionen für höhere Logiken überflüssig. Die Logik enthält automatisch eine zweiwertige von Gleichungen erzeugte Aussagen-Teillogik [50].

Theoreme:

$p = (p{=}\mathsf{I})$	für Aussagen p	*wahr*	[212]
$\neg p = (p{=}0)$	für Aussagen p	*falsch*	[212]

Da die Termlogik die Konjunktion von Aussagen mit Termen erlaubt, lassen sich bedingte Definitionen mit Fallunterscheidungen, die in üblichen Kalkülen nicht durch eine einzige Gleichung definierbar sind, auch explizit formulieren:

Definition:

A FALLS X SONST $B := A{\cdot}X{\vee}B{\cdot}\neg X$

Theorem für Definienda δ, Terme a, b und Aussagen p:

$\delta{:=}a$ FALLS p SONST $b \dashv\vdash p{\Rightarrow}(\delta{=}a), \neg p{\Rightarrow}(\delta{=}b)$	*bedingt definiert*	[132]

5 Klassenlogik

Leibniz bildete Klassen durch Vereinigung von Individuen im Sinn einelementiger Klassen. Peano definierte diese 1889/90 in seinem Klassenkalkül. Seine Regel zum Inhalt von Klassen und eine Regel von Leibniz genügen als Axiome:

Definitionen:

GLEICH $A := \{A\} := \{x|x{=}A\}$
$\{A, B\} := \{A\}\cup\{B\}$
$\{v_1, ..., v_n\} := \{v_1, ..., v_{n-1}\}\cup\{v_n\}$ für $n{>}2$ und Variablen v_1, ..., v_n
A IST IN $B := A$ IST EIN $B := A$ IST $B := A{\in}B := \{A\}\cdot B{\neq}0$
$\{x{\in}A|f_x\} := A\cdot\{x|f_x\}$
DIE POTENZ VON $A := A$-KLASSE $:= \mathcal{P}A := \{x|x{\subseteq}A\}$

Axiome:

$A{\in}B \Rightarrow \{A\}{\subseteq}B$		*individuell* A10	[55]
$X{\in}s{=}f_X\cdot(X{\in}\mathsf{I}) \dashv\vdash s{=}\{x|f_x\}$		*Inhalt* A11	[73]

Theoreme:

$A{\in}\mathsf{I} = \{A\}{\neq}0 = A{\in}\{A\}$		*existent*	[132]
$A{\notin}0$		*leer*	[132]
$X{\in}A{\Rightarrow}A{\neq}0$		*nichtleer*	[132]
$A{\in}B{\Rightarrow}A{\in}\mathsf{I}$	$\{x|f_x\} = \{x|f_x\cdot(x{\in}\mathsf{I})\}$	*real*	[132]
$(A{\in}B)\cdot(B{\subseteq}C){\Rightarrow}A{\in}C$		*Syllogismus*	[133]
$X{\in}A{\Rightarrow}X{\in}(A{\cup}B)$		*extensiv*	[133]
$X{\in}(A{\cdot}B){=}(X{\in}A)\cdot(X{\in}B)$	$X{\in}(A{\cup}B){=}(X{\in}A){\vee}(X{\in}B)$	*distributiv*	[133]
$A{\in}\neg B{=}(A{\in}\mathsf{I})\cdot(A{\notin}B)$	$X{\in}(A\setminus B){=}(X{\in}A)\cdot(A{\notin}B)$	*Ausnahme*	[133]
$A{\in}\mathsf{I} \Rightarrow (A{\in}\{B\}{=}(A{=}B))$		*gleich*	[134]
$C{\in}X \Rightarrow C{\in}\{v_1, ..., v_n\}{=}(C{=}v_1){\vee}...{\vee}(C{=}v_n)$		*mehrdeutig*	[134]
$v_i{\in}X \Rightarrow v_i{\in}\{v_1, ..., v_n\}$	für ganzzahlige $n{\geq}i{\geq}1$	*aufgezählt*	[134]
$X{\in}\{x|f_x\}{=}(X{\in}\mathsf{I})\cdot f_X$	$X{\in}\{x{\in}A|f_x\}{=}(X{\in}A)\cdot f_X$	*erfüllt*	[140]
$\{x|x{\in}A\}{=}A$		*Klasse*	[140]
$X{\in}a{=}X{\in}b \vdash a{=}b$	$X{\in}a{\Rightarrow}X{\in}b \vdash a{\subseteq}b$	*frei*	[140]
$\{x|a{\cdot}p\}{=}p{\cdot}\{x|a\}$	$\{x|p\}{=}p$ für x-freie Aussagen p	*ungebunden*	[140]
$\mathcal{P}0{=}\{0\}$		*Nullpotenz*	[143]
$\mathcal{P}\{A\}{=}\{0, \{A\}\}$		*Einheitspotenz*	[143]
$\mathcal{P}\{A, B\}{=}\{0, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$		*Paarpotenz*	
$X{\subseteq}Y{\Rightarrow}\mathcal{P}X{\subseteq}\mathcal{P}Y$		*monoton*	[143]

Gebundene Variablen stehen stets für existente Terme mit $x{\in}\mathsf{I}$; nur sie können Elemente sein, aber nie inexistente Terme mit $x{\notin}\mathsf{I}$. Existenzbedingungen $x{\in}\mathsf{I}$ sind

daher bei gebundenen Variablen vernachlässigbar. Bei freien Variablen ist jedoch immer die Existenz oder Nichtexistenz zu berücksichtigen. Da die Klassenlogik keine Existenzaxiome hat, sind Beweise im Klassenkalkül elementarer als in der Mengenlehre. Daher werden hier auch triviale oder bekannte Theoreme bewiesen:

Beweis der *Paarpotenz*:

$_{frei}$: $X\in\mathcal{P}\{A,B\}$ $_{erfüllt}$ $(\underline{X\in\mathsf{I}})\cdot(\underline{X\subseteq\{A,B\}})$ $_{def,\ B}$ $\underline{X=X\cdot\{A\}\cup X\cdot\{B\}}$;
Fall 1 $X=0$: $X=0$ $_{>U1\ aufgezählt}$ $X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\}$;
Fall 2 $A\in X$, *Fall 3* $B\in X$: $(A\in X)\cdot(B\in X)$ $_{individuell}$ $(\{A\}\subseteq X)\cdot(\{B\}\subseteq X)$ $_{Teilsumme}$
$\{A\}\cup\{B\}\subseteq X$ $_{def\ +U2\ antisymmetrisch}$ $\{A,B\}=X$ $_{>U1,\ aufgezählt}$ $X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\}$;
Fall ¬1 $X\neq 0$: *Fall ¬2 (analog Fall ¬3)*: $A\notin X$ $_{def\ B}$ $\{A\}\cdot X=0$
$_{>U3\ B}$ $X=X\cdot\{B\}$ $_{def,\ >Fall\ \neg 1}$ $(\underline{X\subseteq\{B\}})\cdot(X\cdot\{B\}\neq 0)$ $_{B\ def}$ $B\in X$ $_{individuell}$
$\{B\}\subseteq X$ $_{+U4\ antisymmetrisch}$ $\{B\}=X$ $_{>U1,\ aufgezählt}$ $X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\}$;
$_{umgekehrt,\ frei}$: $X\in\{0,\{A\},\{B\},\{A,B\}\}$ $_{real\ (def)\ mehrdeutig}$
$(\underline{X\in\mathsf{I}})\cdot((X=0)\vee(X=\{A\})\vee(X=\{B\})\vee(X=\{A,B\}))$ $_{>extrem\ >Oberterm\ >reflexiv}$
$_{(disjunktiv)}$ $(X\subseteq\{A,B\})\vee(X\subseteq\{A\}\cup\{B\})\vee(X\subseteq\{A\}\cup\{B\})\vee(X\subseteq\{A,B\})$
$_{def,\ B}$ $X\subseteq\{A,B\}$ $_{+U5\ erfüllt}$ $X\in\mathcal{P}\{A,B\}$ ∎

Natürlich können beliebige Klassen definiert werden, egal ob sie existieren oder nicht. Auch Russells Klasse, das Paradebeispiel einer inexistenten Klasse, ist ein wohldefinierter Begriff, nützlich, um bedingte Begriffe zu definieren:

Definitionen:

A IST KEIN B $:=$ $A\notin B$ $:=$ $\neg(A\in B)$
DIE RUSSELL-KLASSE $:=$ † $:=$ $\{x|x\notin x\}$
A FALLS B $:=$ A FALLS B SONST †

6 Definierte Prädikatenlogik

Peano führte in seiner Klassenlogik **explizit definierte Quantoren** ein. Kein späterer Logiker griff seine Idee auf, obwohl sie genial ist und ohne zusätzliche Axiome innerhalb der Aussagenlogik eine effiziente mehrsortige Prädikatenlogik erzeugt mit relativierten Quantoren für beliebige Terme:

Definitionen:

f_x FÜR ALLE x $:=$ $\forall x{:}f_x$ $:=$ $(\{x|f_x\}=\mathsf{I})$
f_x FÜR ALLE x IN A $:=$ $\forall x\in A{:}f_x$ $:=$ $\forall x{:}(x\in A\Rightarrow f_x)$
$f_{x,y}$ FÜR ALLE x, y IN A $:=$ $\forall x, y\in A{:}f_{x,y}$ $:=$ $\forall x{:}\forall y\in A{:}(x\in A\Rightarrow f_{x,y})$
ES GIBT x MIT f_x $:=$ $\exists x{:}f_x$ $:=$ $(\{x|f_x\}\neq 0)$
ES GIBT x IN A MIT f_x $:=$ $\exists x\in A{:}f_x$ $:=$ $\exists x{:}((x\in A)\cdot f_x)$

Theoreme für Aussagen f_X und Terme a:

$X{\in}a{\Rightarrow}f_X \vdash \forall x{:}f_x, \forall x{\in}a{:}f_x$	*generell*	[138]
$(X{\in}a){\cdot}p{\Rightarrow}f_X \vdash p{\Rightarrow}\forall x{\in}a{:}f_x$	*generell*	[138]
$(X{\in}A){\cdot}\forall x{:}f_x{\Rightarrow}f_X,\ (X{\in}A){\cdot}\forall x{\in}A{:}f_x{\Rightarrow}f_X$	*speziell*	[138]
$(X{\in}A){\cdot}f_X{\Rightarrow}\exists x{:}f_x{\cdot}\exists x{\in}A{:}f_x$	*quantifizieren*	[138]
$\forall x{\in}A{:}f_x{\cdot}\forall x{\in}A{:}h_x = \forall x{\in}A{:}(f_x{\cdot}h_x)$	$\forall$*distributiv*	[139]
$A{\subseteq}B = \forall x{:}(x{\in}A{\Rightarrow}x{\in}B) = \forall x{\in}A{:}(x{\in}B)$	$\subseteq$*Synonym*	[141]
$\exists x{:}(x{\in}A){=}(A{\neq}0)$	*nichtleer*	[141]
$\exists x{:}(f_x{\cdot}p) = p{\cdot}\exists x{:}f_x$ für x-freie Aussagen p	*ungebunden*	[143]

Mit Quantoren kann man viele andere Klassen definieren, etwa die Vereinigung oder Klassen, deren Elemtente durch Terme mit gebundene Variablen beschrieben werden, für die präzise Definitionen Existenzquantoren erfordern:

Definitionen:

$\{T_x|f_x\} := \{y|\exists x{:}(f_x{\cdot}(y{=}T_x))\}$

$\{T_{x,y}|f_{x,y}\} := \{z|\exists x{:}\exists y{:}(f_{x,y}{\cdot}(z{=}T_{x,y}))\}$

DIE VEREINIGUNG ALLER $A := \bigcup A := \{x|\exists y{:}((y{\in}A){\cdot}(x{\in}y))\}$

Theoreme:

$T_X{\in}\{T_x|f_x\}{=}(T_X{\in}\mathsf{I}){\cdot}f_X$	*erfüllt*	[143]
$\bigcup 0{=}0$	$\bigcup$*leer*	[144]
$A{\in}\mathsf{I} \Rightarrow \bigcup\{A\}{=}A$	$\bigcup$*Einheit*	[144]
$A{\subseteq}B \Rightarrow \bigcup A{\subseteq}\bigcup B$	$\bigcup$*monoton*	[144]
$\bigcup(A{\cup}B) = \bigcup A{\cup}\bigcup B$	$\bigcup$*Summe*	[144]
$Y{\in}X \Rightarrow Y{\subseteq}\bigcup X$	$\bigcup$*Schranke*	[144]
$Y{\in}X{\Rightarrow}(A{\in}\mathcal{P}Y{\Rightarrow}A{\in}\mathcal{P}\bigcup X)$	*Potenzschranke*	

Beweis der *Potenzschranke*:

$(A{\subseteq}Y){\cdot}(Y{\subseteq}\bigcup X)$ *transitiv* $A{\subseteq}\bigcup X$ *erfüllt (hyp2-real)*
hyp2-erfüllt +hyp1-$\bigcup$*Schranke*
$A{\in}\mathcal{P}\bigcup X$ ∎

7 Definierte Relationslogik mit Funktionen

1888 führte Peano geordnete Paare für Relationen ein. 1914 definierte Hausdorff Funktionen als eindeutige Relationen. Auch sie lassen sich explizit definieren mit Peanos Kennzeichnungsoperator $\imath$, der das Element einelementiger Klassen kennzeichnet, und mit Kuratowskis Paar von 1921. Sie generieren die komplette Funktionsterminologie auf direkte und allgemeine Weise für beliebige Klassen:

Definitionen:

$(A,B) := \{\{A,B\},\{A\}\}$ FALLS $(A\in\mathsf{I})\cdot(B\in\mathsf{I})$

DAS $A := \imath A := \bigcup A$ FALLS $\exists x{:}(A=\{x\})$

DAS F VON $X := F(X) := \imath\{y|(X,y)\in F\}$

DIE FUNKTION F AUF $A := F\restriction_A := \{(x,y)|(x\in A)\cdot(y=F(x))\}$

DAS BILD VON A UNTER $F := F[A] := \{F(x)|x\in A\}$

WERT VON $F := \mathsf{Im}F := F[\mathsf{I}]$

ARGUMENT VON $F := \mathsf{Def}F := \{x|F(x)\in\mathsf{I}\}$

ABB := ABBILDUNG $:= \{f|f=f\restriction_{\mathsf{I}}\}$

ABBILDUNG VON A NACH $B := A\rightarrow B := \{f\in\mathsf{ABB}|(A=\mathsf{Def}f)\cdot(f[A]\subseteq B)\}$

$F{:}A\rightarrow B := F\in(A\rightarrow B)$

IDENTITÄT := Id $:= \{(x,y)|x=y\}$

$G\circ F := \{(x,y)|y=G(F(x))\}$

Theoreme (mit dem Axiom $\{x,y\}\in\mathsf{I}$, beweisbar in der Mengenlogik):

$F(X)\in\mathsf{I}=X\in\mathsf{Def}F$	*Argument*	[145]
$X\in A\Rightarrow(F(X)=F\restriction_A(X))$	*wertgleich*	[146]
$\mathsf{Def}(F\restriction_A)=A\cdot\mathsf{Def}F \qquad \mathsf{Im}(F\restriction_A)=F[A]$	*Einschränkung*	[146]
$A\subseteq\mathsf{Def}F=(A=\mathsf{Def}(F\restriction_A))$	*Teilfunktion*	
$(F\restriction_A)\restriction_B=F\restriction_{A\cdot B}$	*doppelt eingeschränkt*	[146]
$F\restriction_0=0 \qquad F[0]=0$	*Leerfunktion*	[147]
$F[\{A\}]=\{F(A)\}$	*Einzelbild*	[147]
$F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$	*Bildunion*	[147]
$A\subseteq B\Rightarrow F[A]\subseteq F[B]$	*monoton*	[147]
$\delta := \{(x,y)|y=\varphi_x\}$	*Graph*	[148]
$\vdash A\in\mathsf{Def}\delta\Rightarrow(\delta(A)=\varphi_A),\ \ \mathsf{Def}\delta=\{x|\varphi_x\in\mathsf{I}\}$		
$\mathsf{Id}[A]=A$	*identisches Bild*	[149]
$(G\circ F)[A]=G[F[A]]$	*Bild vom Bild*	[149]
$Y\in\bigcup F[X]=\exists z\in X{:}((Y\in F(z))\cdot(F(z)\in\mathsf{I}))$	*Wertelement*	

Beweise:

Teilfunktion:

$A\subseteq\mathsf{Def}F$ *def* $A=A\cdot\mathsf{Def}F$ *Einschränkung* $A=\mathsf{Def}(F\restriction_A)$ ∎

Leerfunktion (erste Formel bewiesen in [147]):

$F[0]$ *def* $\{y|\exists y{:}((y=F(x))\cdot(x\in 0))\}$ *leer-falsch* $\{y|\exists y{:}((y=F(x))\cdot 0)\}$ *ungebunden*

$0\cdot\{y|\exists y{:}(y=F(x)\}$ *B* 0 ∎

Wertelement:

$Y\in\bigcup F[X]$ *erfüllt (2x)* $\exists a{:}(\exists z{:}((a\in\mathsf{I})\cdot(a=F(z))\cdot(z\in X))\cdot(Y\in a))$ *ungebunden*

$\exists a{:}\exists z{:}((Y\in a)\cdot(a\in\mathsf{I})\cdot(a=F(z))\cdot(z\in X))$ *Tausch, ungebunden*

$\exists z{:}((Y{\in}F(z)){\cdot}(F(z){\in}\mathsf{I}){\cdot}(z{\in}X))$ *def (B)* $\exists z{\in}X{:}((Y{\in}F(z)){\cdot}(F(z){\in}\mathsf{I}))$ *umgekehrt. erfüllt* $\exists z{:}((Y{\in}F(z)){\cdot}(F(z){\in}F[X]))$ *quantifizieren* $\exists z{:}\exists a{:}((Y{\in}a){\cdot}(a{\in}F[X]))$ *+real ungebunden* $(Y{\in}\mathsf{I}){\cdot}\exists a{:}((Y{\in}a){\cdot}(a{\in}F[X]))$ *erfüllt* $Y{\in}\bigcup F[X]$ ∎

8 Definierte Mengenlogiken

Leibniz nutzte eine verbale **binäre Mengenlogik** in der *Monadologie* 1714 [1]. **Peano** gab 1897 in seiner *Logique mathématique* [7] erstmals formalisierte Mengenaxiome an: $(A{\in}\mathbb{K}){\cdot}(B{\in}\mathbb{K}){\Rightarrow}A{\cdot}B{\in}\mathbb{K}$, $A{\in}\mathbb{K}{\Rightarrow}\neg A{\in}\mathbb{K}$, $\{A\}{\in}\mathbb{K}$; sie erzeugen einen komplementären Mengenverband $\mathbb{K}$. Russell und Zermelo dachten, auch die Russell-Klasse existiere in $\mathbb{K}$, und nannten daher seine Logik inkonsistent [74]. Modelle zeigen jedoch: Peanos **komplementäre Mengenlogik** ist konsistent [83f]. Sein Universum $\mathbb{K}$ ist explizit definierbar, so dass seine Axiome beweisbar sind [154]. Auch das binäre Leibniz-Universum $\mathbb{L}$ und ein kleineres extensionales Universum $\mathbb{E}$ sind explizit definierbar, und zwar in der leicht verständlich definierten *Verbalen Logik* [5], die die Termsprache auf ein aktuelles Niveau hebt. Aus verbalen Logiktexten ergeben sich dann per Definition kurze Formeln.

Definitionen:

SINGULÄR := x MIT $\{x\}$ IST EXISTENT
SCHNEIDBAR := x MIT $x{\cdot}y$ IST EXISTENT FÜR ALLE y
NEGIERBAR := x MIT NICHT-x IST EXISTENT
IDEE := x MIT (x IST EINE MENGE = x IST EINE MENGENKLASSE)
$\mathbb{K}$:= SCHNEIDBARE NEGIERBARE SINGULÄRE IDEE

EXTENSIONAL := x MIT $\{x\}$ IST EXISTENT UND $x{\cup}y$ IST EXISTENT FÜR ALLE y
WAHR := GLEICH JA
FALSCH := GLEICH NEIN
BINÄR := x MIT $x{=}x$ IST WAHR UND $x{\neq}x$ IST FALSCH
$\mathbb{L}$:= BINÄRE EXTENSIONALE IDEE

FALSIFIZIERBAR := x MIT $x{\cdot}\neg x$ IST FALSCH
$\mathbb{E}$:= FALSIFIZIERBARE EXTENSIONALE IDEE

Theoreme:

BINÄR $= (\mathsf{I}{\in}\{\mathsf{I}\}){\cdot}(0{\in}\{0\}) = (\mathsf{I}{\in}\mathsf{I}){\cdot}(0{\in}\mathsf{I})$	*Binärsynonym*	
FALSIFIZIERBAR $= 0{\in}\{0\} = 0{\in}\mathsf{I}$	*Falsifizierbarkeit*	
$\mathbb{K} \vdash 0{\in}\mathsf{I},\ \mathsf{I}{\in}\mathsf{I}$	*reale Bits*	[153]
$\mathbb{K} \vdash A{\in}\mathsf{I}{\Rightarrow}\forall y{:}(A{\cup}y{\in}\mathsf{I}),\ \{A\}{\in}\mathsf{I}$	*extensional*	[154]
$\mathbb{K} \vdash \mathbb{L} \vdash \mathbb{E}$	*wählbares Universum*	

Beweise:

Binärsynonym:

$\mathsf{BINÄR}_{\,def}\ \{x|((x{=}x){\in}\{\mathsf{I}\})\cdot((x{\neq}x){\in}\{0\})\}_{\,reflexiv\text{-}wahr/falsch}\ \{x|(\mathsf{I}{\in}\{\mathsf{I}\})\cdot(0{\in}\{0\})\}$
$_{ungebunden}\ (\mathsf{I}{\in}\{\mathsf{I}\})\cdot(0{\in}\{0\})\ _{existent}\ (\mathsf{I}{\in}\mathsf{I})\cdot(0{\in}\mathsf{I})$ ■

Falsifizierbarkeit:

$\mathsf{FALSIFIZIERBAR}_{\,def}\ \{x|(x\cdot\neg x){\in}\{0\}\}_{\,B,\ ungebunden}\ 0{\in}\{0\}\ _{existent}\ 0{\in}\mathsf{I}$ ■

wählbares Universum:

$\mathbb{K}_{\,extensional1\ generell}\ \forall x{\in}\mathsf{I}{:}\forall y{:}(x{\cup}y{\in}\mathsf{I})\ _{+extensional2}\ \forall x{\in}\mathsf{I}{:}((\{x\}{\in}\mathsf{I})\cdot\forall y{:}(x{\cup}y{\in}\mathsf{I}))$
$_{def,\ B}\ \underline{\mathsf{EXTENSIONAL}{=}\mathsf{I}};\ \mathbb{K}_{\,def\text{-}Faktoren}\ \mathsf{IDEE}_{\,B}\ \mathsf{I}{\cdot}\mathsf{IDEE}_{\,U\ +reale\ Bits}$
$(0{\in}\mathsf{I})\cdot(\mathsf{I}{\in}\mathsf{I})\cdot\mathsf{EXTENSIONALE\ IDEE}_{\,def,\ Binärsynonym}\ \mathbb{L}_{\,def\text{-}Faktor\ Falsifizierbarkeit}\ \mathbb{E}$ ■

Eine **explizite Mengendefinition** sondert im Universum die Klasse $\mathbb{M}$ aller Mengen aus und liefert eine **ableitbare Cantor-Mengenlehre**, in der Komplemente von Mengen keine Mengen sind und Urelemente im Sinn seiner 'Objekte unserer Anschauung' möglich sind [95]:

Definitionen:

$\mathsf{URELEMENT} := \mathbb{U} := \{x|\neg\exists y{\in}x{:}(y{\neq}x)\}$
$\mathsf{FUNDIERT} := \mathbb{F} := \{x|\forall y{\in}\mathcal{P}x\setminus\mathbb{U}{:}((\Cap y{\in}y)\cdot(y\cdot\Cap y{=}0))\}$
$\mathsf{POTENZIERBAR} := x\ \mathsf{MIT\ DIE\ POTENZ\ VON}\ x\ \mathsf{IST\ EXISTENT}$
$\mathsf{SUMMIERBAR} := x\ \mathsf{MIT\ DIE\ VEREINIGUNG\ ALLER}\ x\ \mathsf{IST\ EXISTENT}$
$\mathbb{M} := \mathsf{MENGE} := \mathsf{POTENZIERBARES\ SUMMIERBARES\ FUNDIERTES\ DING}$

Theoreme:

$\mathsf{URELEMENT}{=}\{x|(x{=}0)\cdot(x{=}\{x\})\}$	*Urelemente*	[180]
$\mathsf{ALLE\ URELEMENTE\ SIND\ MENGEN},\ \mathbb{U}{\subseteq}\mathbb{M}$	*primitive Mengen*	[180]

In $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ und $\mathbb{E}$ ergibt sich die Mengenlehre aus Cantors Axiom, dass Mengenbilder existieren [110]. Diese werden wie Mengen nach analogen Regeln (*) gehandhabt:

Axiom:

$A{\in}\mathbb{M}{\Rightarrow}F[A]{\in}\mathsf{I}$	*Mengenbild*	A12	[96]

Definition:

$\mathsf{BILD} := \mathbb{B} := \{f[x]|x{\in}\mathbb{M}\}$

Theoreme:

$\{A,B\}{\in}\mathbb{B},\ \{A\}{\in}\mathbb{B},\ 0{\in}\mathbb{B},\ \{A\}{\in}\mathsf{I},\ 0{\in}\mathsf{I}$	* *elementar*	[178]
$A{\in}\mathbb{B}{\Rightarrow}G[A]{\in}\mathbb{B}$	* *Bildbelegung*	[177]
$(A{\subseteq}C)\cdot(C{\in}\mathbb{B}){\Rightarrow}A{\in}\mathbb{B}$	* *Teilbild*	[178]
$(A{\in}\mathbb{B})\cdot(A{\subseteq}\mathbb{B}){\Rightarrow}\bigcup A{\in}\mathbb{B}$	* *Bildvereinigung*	[180/5]
$A{\in}\mathbb{B}{\Rightarrow}\mathcal{P}A{\in}\mathbb{B}$	* *Bildpotenz*	[178]

$A\in\mathbb{M}\Rightarrow A\in\mathbb{B},\ \mathbb{M}\subseteq\mathbb{B}$	*Bildart*	[175ff]
$A\in\mathbb{M}\Rightarrow A\subseteq\mathbb{M}$	*Mengen von Mengen*	[154]
$A\in\mathbb{M}\Rightarrow\neg A\notin\mathbb{M},\ \mathsf{I}\notin\mathbb{M}$	*Nichtmengen*	[164f]
$A\in\mathbb{M}\Rightarrow F\restriction_A\in\mathsf{ABB}$	*Teilabbildung*	[164]
$A\in\mathbb{B}\Rightarrow\mathcal{P}A\neq F[A]$	*kein Bild*	[*164]

Beweis von *elementar*:

bewiesen [178]: $\{A,A\}\in\mathbb{B}$ *def B* $\{A\}\in\mathbb{B}$ *+extrem* $(0\subseteq\{A\})\cdot(\{A\}\in\mathbb{B})$ *Teilbild* $0\in\mathbb{B}$ *real* ∎

Folgen bildet man durch Abzählen mit Ordinalzahlen. Cantor dehnte diese erstmals ins Transfinite aus. Zermelo gab 1915 die erste präzise Definition der Ordinalzahlen mit einem Zähloperator A' und der Rückwärtszählung $\bigcup A$; seine elegante implizite Definition ist in eine kurze **explizite Ordinalzahldefinition** umwandelbar [98]:

Definitionen:

$\mathsf{DIE\ ZAHL\ NACH}\ A := A' := A\cup\{A\}$

$1:=0'\quad 2:=1'\quad 3:=2'$

$\mathsf{ORDINALZAHL} := \mathbb{O} := \{z\in\mathbb{M}\mid\forall x\in z:(x'\in z')\cdot\forall y\in\mathcal{P}z:(\bigcup y\in z')\}$

$\mathsf{FOLGE} := \{f\mid\exists z\in\mathbb{O}:(f:z\longrightarrow\mathsf{I})\}$

Theoreme:

$(X\in\mathbb{O})\cdot(Y\in\mathbb{O})\Rightarrow(X\subset Y)=(X\in Y)$	*geordnet*	[166]
$Z\in\mathbb{O}\Rightarrow Z\subseteq\mathbb{O}$	*Zahlenmenge*	[166]
$(Z\in X)\cdot(X\in\mathbb{O})\Rightarrow(Z\in\mathbb{O})\cdot(Z\neq X)\cdot(Z\subseteq X)\cdot(Z=Z\cdot X)$	*Subzahl*	
$(A\in\mathbb{O})\cdot(B\in\mathbb{O})\Rightarrow(A\subset B)\vee(B\subseteq A)$	*linear*	[166]
$\mathbb{O}\notin\mathsf{I},\ \mathbb{O}\notin\mathbb{M}$	*Totalität*	[167]
$X\in Y\Rightarrow(X\in A'=(X\in A)\vee(X=A))$	*vorher*	[167]
$A\in X\Rightarrow A\in A'$	*mitgezählt*	[167]
$A\in\mathbb{O}\Rightarrow A'\in\mathbb{O}$	*zählen*	[168]
$0\in\mathbb{O},\ 1\in\mathbb{O},\ 2\in\mathbb{O},\ 3\in\mathbb{O}$	*Zahl*	[169]
$(X\in\mathbb{O})\cdot(X\neq 0)\cdot(X\neq 1)\Rightarrow 1\in X$	*Zahl über 1*	
$A\in\mathbb{O}\Rightarrow(\bigcup A\in\mathbb{O})\cdot(\bigcup(A')=A)$	*rückwärts*	[168]
$A\in\mathbb{O}\Rightarrow(A=\bigcup A)\vee(A=(\bigcup A)')$	*Grenzverhalten*	[168]
$(Z\in X)\cdot(X\in\mathbb{O})\cdot(X=\bigcup X)\Rightarrow Z'\in X$	*Zählgrenze*	
$(Z\in\mathbb{O})\cdot(Z\neq\bigcup Z)\Rightarrow\bigcup Z\in Z$	*Vorgänger*	
$A\in\mathbb{O}\Rightarrow A'\neq\bigcup(A')$	*Nachfolger*	
$(a\subseteq\mathbb{O})\cdot(0\in a)\cdot(a\subseteq\mathcal{P}a)\vdash$ $(0\in K)\cdot\forall x\in a\cdot K:(x'\in K)\cdot\forall x\in a:((x=\bigcup x)\cdot(x\cdot a\subseteq K)\Rightarrow x\in K)\Rightarrow a\subseteq K$	*Induktion*	[169]
$f_0,\ X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})\cdot((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$ $\vdash\forall x\in\mathbb{O}:f_x,\ \ X\in\mathbb{O}\Rightarrow f_X$	*transfinite Induktion*	

$\forall x\in\mathbb{O}:(x\subseteq K\Rightarrow x\in K)\Rightarrow\mathbb{O}\subseteq K$ *transfinite Klasse* [169]

$F\in\mathsf{FOLGE}\Rightarrow \mathsf{Def}F\in\mathbb{O}$ *Zahlargumente* [171]

$(F\in\mathsf{FOLGE})\cdot(Y\in\mathsf{I})\cdot(G=F\cup\{(\mathsf{Def}F, Y)\})\Rightarrow$ *Fortsetzung* [172]
$(G:\mathsf{Def}F'\rightarrow\mathsf{I})\cdot(G\in\mathsf{FOLGE})\cdot\forall x\in\mathsf{Def}F:(F(x)=G(x))\cdot(Y=G(\mathsf{Def}F))$

Beweise:

Subzahl: *hyp2-Zahlenmenge* $X\subseteq\mathbb{O}$ *+hyp1 Syllogismus* $Z\in\mathbb{O}$ *geordnet (hyp1+2)* $Z\subset X$ *def*
$(Z\neq X)\cdot(Z\subseteq X)$ *def* $Z=Z\cdot X$ ■

Zahl über 1: *linear def (hyp1)* $(X\subset 1)\vee(1\subset X)\cdot(X\neq 1)$ *-hyp3, geordnet* $(X\in 1)\vee(1\in X)$
def $(X\in\{0\})\vee(1\in X)$ *gleich (hyp1-real)* $(X=0)\vee(1\in X)$ *hyp2-falsch* $0\vee(1\in X)$ *B* $1\in X$ ■

Zählgrenze indirekt: $Z'\notin X$ *geordnet (hyp1+2 Subzahl zählen)*
$Z'\not\subset X$ *falsch>linear* $X\subseteq Z'$ *⋃monoton* $\bigcup X\subseteq\bigcup Z'$ *hyp3, rückwärts (Subzahl) +Subzahl*
$(X\subseteq Z)\cdot(Z\subseteq X)\cdot(Z\neq X)$ *antisymmetrisch* $(X=Z)\cdot(Z\neq X)$ *B* 0 ■

Vorgänger:
Subzahl (hyp1) $Z\in\mathbb{O}$ *Grenzverhalten* $(Z=\bigcup Z)\vee(Z=(\bigcup Z)')$ *+hyp3 B* $\underline{Z=(\bigcup Z)'}$
hpy1 rückwärts $\bigcup Z\in\mathbb{O}$ *mitgezählt* $\bigcup Z\in(\bigcup Z)'$ *U* $\bigcup Z\in Z$ ■

Nachfolger:
$A\in\mathbb{O}$ *mitgezählt, zählen* $(A\in A')\cdot(A'\in\mathbb{O})$ *Subzahl* $A'\neq A$ *rückwärts (hyp)* $A'\neq\bigcup(A')$ ■

(1) $\mathbb{O}\subseteq\mathcal{P}\mathbb{O}$ *frei*: $X\in\mathbb{O}$ *real +Zahlenmenge* $(X\in\mathsf{I})\cdot(X\subseteq\mathbb{O})$ *erfüllt def* $X\in\mathcal{P}\mathbb{O}$ ■

transfinite Induktion mit $K:=\{x|f_x\}$:
(generell): *Prämisse2>hyp* $(f_X\Rightarrow f_{X'})\cdot((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$ *def satified*
$(X\in K\Rightarrow X'\in K)\cdot((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:z\in K\Rightarrow X\in K)$ *+hyp-distributiv, +Subzahl-distributiv*
$\underline{(X\in\mathbb{O}\cdot K\Rightarrow X'\in K)}\cdot((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X\cdot\mathbb{O}:z\in K\Rightarrow X\in K)$ *⊆Synonym*
$(X=\bigcup X)\cdot(X\cdot\mathbb{O}\subseteq K)\Rightarrow X\in K$ *generell (hyp) +Prämisse1 +U-generell*
$(0\in K)\cdot\forall x\in\mathbb{O}\cdot K:(x'\in K)\cdot\forall x\in\mathbb{O}:((x=\bigcup x)\cdot(x\cdot\mathbb{O}\subseteq K)\Rightarrow x\in K)$
Induktion (reflexiv, Zahl, (1)) $\mathbb{O}\subseteq K$ *hyp Syllogismus* $X\in K$ *def erfüllt* f_X ■

9 Explizite rekursive Definitionen

Rekursive Definitionen pflegt man implizit mit Rekursionsaxiomen zu formulieren. Sie sind auch explizit formulierbar als Vereinigung von Folgen mit gleicher Rekursionsregel. Ensteht dabei eine Folge, so ist die Rekursion nicht transfinit, sondern endet bei einer Ordinalzahl. Im transfiniten Fall ist diese Vereinigung auf allen Ordinalzahlen definiert und keine Menge. Zum Beweis der Transfinität ist nur zu zeigen, dass der Rekursionswert für beliebige Ordinalzahlen existiert:

Theoreme für Terme φ_F, γ_F, Γ, δ:

$\gamma_F := \forall z \in \mathrm{Def}F:(F(z)=\varphi_{F\restriction_z})$	*Rekursionsregel*
$\Gamma := \{f \in \mathrm{FOLGE} \mid \gamma_f\}$	*rekursive Funktionen*
$\delta := \bigcup\{f \in \mathrm{FOLGE} \mid \forall z \in \mathrm{Def}f:(f(z)=\varphi_{f\restriction_z})\}$	*rekursive Definition*
$\vdash X \in \mathrm{Def}\delta \Rightarrow \delta(X)=\varphi_{\delta\restriction X}$	*Rekursion* [173]
$\mathrm{Def}\delta=\{x \in \mathbb{O} \mid \exists f \in \Gamma:(x \in \mathrm{Def}f)\}$	*rekursive Argumente* [173]
$(X \in \mathbb{O})\cdot(X \subseteq \mathrm{Def}\delta) \Rightarrow \varphi_{\delta\restriction X} \in \mathsf{I}$	*Realwerte (Prämisse)*
$\vdash X \in \mathbb{O} \Rightarrow (\delta(X)=\varphi_{\delta\restriction X})$	*transfinite Rekursion*
$\mathrm{Def}\delta=\mathbb{O}$	*Transfinität*
$\mathrm{Def}\delta \notin \mathsf{I}$, $\mathrm{Def}\delta \notin \mathbb{M}$	*Totalität*
$X \in \mathbb{O} \Rightarrow (X=\mathrm{Def}\delta\restriction X)\cdot(\delta(X) \in \mathsf{I})$	*Teilrekursion*

Beweise mit $G:=\delta\restriction X \cup \{(X, \varphi_{\delta\restriction X}\}$:

(1) $(X \in \mathbb{O})\cdot\gamma_F \Rightarrow \gamma_{F\restriction X}$ *γ-generell:* $Z \in \mathrm{Def}(F\restriction X)$ *Einschränkung* $Z \in X \cdot \mathrm{Def}F$ *distributiv +hyp2-def* $(\underline{Z \in X})\cdot(Z \in \mathrm{Def}F)\cdot\forall z \in \mathrm{Def}F:(F(z)=\varphi_{F\restriction_z})$ *Subzahl(hyp1) speziell* $(Z=Z\cdot X)\cdot(F(Z)=\varphi_{F\restriction_Z})$ *Tausch B* $F(Z)=\varphi_{F\restriction X\cdot Z}$ *wertgleich(U), doppelt eingeschränkt* $F\restriction X(Z)=\varphi_{F\restriction X\restriction Z}$ ■

(2) $(X \in \mathbb{O})\cdot(X \subseteq \mathrm{Def}\delta) \Rightarrow (\delta\restriction X \in \mathrm{FOLGE})\cdot\gamma_{\delta\restriction X}$: *hyp1 erfüllt* $X \in \mathbb{M}$ *Teilabbildung, Teilfunktion (hyp2) +extrem* $(\delta\restriction X \in \mathrm{ABB})\cdot(X=\mathrm{Def}(\delta\restriction X))\cdot(\delta[X] \subseteq \mathsf{I})$ *def erfüllt* $\delta\restriction X : X \to \mathsf{I}$ *def-erfüllt (hyp1)* $\delta\restriction X \in \mathrm{FOLGE}$; *Rekursion* $X \in \mathrm{Def}\delta \Rightarrow (\delta(X)=\varphi_{\delta\restriction X})$ *generell, def* γ_δ *hyp1 (1)* $\gamma_{\delta\restriction X}$ ■

(3) $(X \in \mathbb{O})\cdot(G(X)=\varphi_{\delta\restriction X})\cdot\forall z \in X:(G(z)=\varphi_{\delta\restriction_z}) \Rightarrow \forall z \in X':(G(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})$: *generell:* $Z \in X'$ *vorher* $(Z \in X) \vee (Z=X)$ *hyp3-speziell disjunktiv, >hyp2 disjunktiv* $(G(Z)=\varphi_{\delta\restriction_Z}) \vee (G(Z)=\varphi_{\delta\restriction_Z})$ *B* $G(Z)=\varphi_{\delta\restriction_Z}$ ■

(4) $X \in \mathbb{O} \Rightarrow (X \subseteq \mathrm{Def}\delta \Rightarrow X \in \mathrm{Def}\delta)$: *(2), Realwerte (hyp1+2)* $(\underline{\delta\restriction X \in \mathrm{FOLGE}})\cdot\underline{\gamma_{\delta\restriction X}}\cdot(\underline{\varphi_{\delta\restriction X} \in \mathsf{I}})$ *Teilfunktion(hyp2)* $X=\mathrm{Def}\delta\restriction X$ *>U2-def, >Fortsetzung (U1, U3, def)* $\underline{\forall z \in X:(\delta\restriction X(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})}$ $\cdot(G:X' \rightarrowtail \mathsf{I})\cdot(\underline{G \in \mathrm{FOLGE}})\cdot\underline{\forall z \in X:(\delta\restriction X(z)=G(z))}\cdot\underline{(\varphi_{\delta\restriction X}=G(X))}$ *def-erfüllt* $\underline{\mathrm{Def}G=X'}$ *>mitgezählt (hyp1)* $\underline{X \in \mathrm{Def}G}$ *U4+6 ∀distributiv, Tausch* $\forall z \in X:(G(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})$ *+U7, (3)* $\forall z \in X':(G(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})$ *U8 def* γ_G *+U5 erfüllt* $G \in \Gamma$ *+U9 quantifizieren* $\exists f \in \Gamma:(X \in \mathrm{Def}f)$ *+hyp1 erfüllt* $X \in \{x \in \mathbb{O} \mid \exists f \in \Gamma:(x \in \mathrm{Def}f)\}$ *rekursive Argument* $X \in \mathrm{Def}\delta$ ■

Transfinität, Totalität:

(4) $\forall x \in \mathbb{O}:(x \subseteq \mathrm{Def}\delta \Rightarrow x \in \mathrm{Def}\delta)$ *transfinite Klasse* $\underline{\mathbb{O} \subseteq \mathrm{Def}\delta}$ *rekursive Argumente def* $\mathrm{Def}\delta=\mathbb{O}\cdot\{x \mid \exists f \in \Gamma:(x \in \mathrm{Def}f)\}$ *>Oberterm* $\mathrm{Def}\delta \subseteq \mathbb{O}$ *antisymmetrisch (U)* $\mathbb{O}=\mathrm{Def}\delta$ *>Totalität für* $\mathbb{O}$ $\mathrm{Def}\delta \notin \mathsf{I}$, $\mathrm{Def}\delta \notin \mathbb{M}$ ■

transfinite Rekursion, Teilrekursion:

hyp +Zahlenmenge $(X \in \mathbb{O})\cdot(X \subseteq \mathbb{O})$ *Transfinität* $(X \in \mathrm{Def}\delta)\cdot(X \subseteq \mathrm{Def}\delta)$ *Rekursion, Teilfunktion Realwerte (hyp)* $(\delta(X)=\varphi_{\delta\restriction X})\cdot(X=\mathrm{Def}\delta\restriction X)\cdot(\varphi_{\delta\restriction X} \in \mathsf{I})$ *Tausch* $\delta(X) \in \mathsf{I}$ ■

Häufig sind transfinite Rekursionen mit Regeln für Nachfolger- und Grenzzahlen:

Theoreme für Terme λ_F, σ_F und die *rekursive Definition* von δ mit folgendem φ_F:	
$\varphi_F := \sigma_F$ FALLS $\mathsf{Def}F \neq \bigcup \mathsf{Def}F$ SONST λ_F	
Realwerte $\vdash X \in \mathbb{O} \Rightarrow \delta(X') = \sigma_{\delta\restriction_{X'}}$	*Folgewert*
$(X \in \mathbb{O}) \cdot (X = \bigcup X) \Rightarrow \delta(X) = \lambda_{\delta\restriction_X}$	*Grenzwert*

Beweise:

Folgewert:

transfinite Rekursion + Teilrekursion (Realwerte, hyp-zählen) $\underline{(\delta(X') = \varphi_{\delta\restriction_{X'}}) \cdot (X' = \mathsf{Def}\delta\restriction_{X'})}$

>Nachfolger(hyp) $\mathsf{Def}\delta\restriction_{X'} \neq \bigcup \mathsf{Def}\delta\restriction_{X'}$ *U, bedingt definiert* $\delta(X') = \sigma_{\delta\restriction_{X'}}$ ■

Grenzwert:

transfinite Rekursion +Teilrekursion (Realwerte, hyp1) $\underline{(\delta(X) = \varphi_{\delta\restriction_X}) \cdot (X = \mathsf{Def}\delta\restriction_X)}$ *>hyp2*

$\mathsf{Def}\delta\restriction_X = \bigcup \mathsf{Def}\delta\restriction_X$ *U bedingt definiert* $\delta(X) = \lambda_{\delta\restriction_X}$ ■

10 Hierarchien

Nun wird Neumanns Hierarchie, die Mengen durch Potenzen der leeren Menge konstruiert, verallgemeinert mit einer **Potenzvariante**, bei der eine Tauschfunktion die leere Menge mit einer gewählten Startklasse vertauscht:

Definitionen:	
$S_A := \{(x,y) \mid y = (x \cdot (x \neq A) \vee A \cdot (x = 0))\}$	*Tauschfunktion*
$\mathcal{P}_A X := S_A[\mathcal{P}X]$	*Potenzvariante*

Theoreme:	
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow ((X \in \mathsf{I}) \cdot (X \neq A) \cdot (X \neq 0) \Rightarrow (S_A(X) = X))$	*fix*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow (S_A(0) = A) \cdot (S_A(A) = 0)$	*vertauscht*
$A \notin \mathsf{I} \Rightarrow S_A(0) \notin \mathsf{I}$	*Tauschlücke*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow (X \in \mathsf{I}) \cdot (Y \in \mathsf{I}) \Rightarrow ((S_A(X) = Y) \Rightarrow (X = S_A(Y)))$	*Rücktausch*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow (S_A \circ S_A = \mathsf{Id})$	*selbstinvers*
$A \in \mathsf{I} \Rightarrow ((0 \in B) \cdot (A \notin B) \Rightarrow (S_A[B] = \{A\} \cup B \setminus \{0\}))$	*Variante*
$A \in B \Rightarrow (0 \in B \Rightarrow (S_A[B] = B))$	*Original*
$X \in \mathsf{I} \Rightarrow X \in \{A\} \cup B \setminus \{0\} = (X = A) \vee (X \in B) \cdot (X \neq 0)$	*Tauschfälle*

Beweise mit $\phi_X := X \cdot (X \neq A) \vee A \cdot (X = 0)$, $FÄLLE := (X = A) \vee (X = 0) \vee (X \neq A) \cdot (X \neq 0)$:

(0) FÄLLE: $_B$ ■

(1) $\phi_A = 0$: ϕ_A *def* $A \cdot (A \neq A) \vee A \cdot (A = 0)$ *reflexiv-wahr, Tausch* $A \cdot \neg \mathsf{I} \vee 0 \cdot (A = 0)$ $_B$ 0 ■

(2) $\phi_0 = A$: ϕ_0 *def* $0 \cdot (0 \neq A) \vee A \cdot (0 = 0)$ *-reflexiv B* A ■

(3) $(X\neq A)\cdot(X\neq 0)\Rightarrow(\phi_X=X)$: ϕ_X *def* $X\cdot(X\neq A)\vee A\cdot(X=0)$ *hyp1-wahr, hyp2-falsch* $X\cdot\mathsf{I}\vee A\cdot 0$ *B* X ■

(4) $A\in\mathsf{I}\Rightarrow(X\in\mathsf{I}\Rightarrow X\in\mathsf{Def}S_A)$: *(1)(2)(3)disjunktiv >FÄLLE* $(\phi_X=0)\vee(\phi_X=A)\vee(\phi_X=X)$ *disjunktiv>elementar >hyp1 >hyp2, B* $\phi_X\in\mathsf{I}$ *erfüllt-Graph2 (hyp2)* $X\in\mathsf{Def}S_A$ ■

vertauscht:

(4) (hyp, elementar) $(A\in\mathsf{Def}S_A)\cdot(0\in\mathsf{Def}S_A)$ *Graph1* $(S_A(A)=\phi_A)\cdot(S_A(0)=\phi_0)$ *>(1)(2) (hyp)* $(S_A(0)=A)\cdot(S_A(A)=0)$ ■

fix:

(4) (hyp 1-4) $X\in\mathsf{Def}S_A$ *Graph1* $S_A(X)=\phi_X$ *(3) (hyp3+4)* $S_A(X)=X$ ■

Tauschlücke:

indirekt: $S_A(0)\in\mathsf{I}$ *Argument* $0\in\mathsf{Def}S_A$ *Graph2-erfüllt* $\phi_0\in\mathsf{I}$ *(2)* $A\in\mathsf{I}$ *hyp-falsch* 0 ■

(5) $(A\in\mathsf{I})\cdot(X\in\mathsf{I})\Rightarrow(S_A(S_A(X))=X)$:

Fall 1 $S_A(S_A(0))=0$: $S_A(S_A(0))$ *vertauscht (hyp1)* $S_A(A)$ *vertauscht (hyp1)* 0;

Fall 2 $S_A(S_A(A))=A$: $S_A(S_A(A))$ *vertauscht (hyp1)* $S_A(0)$ *vertauscht (hyp1)* A;

Fall 3 $(X\neq A)\cdot(X\neq 0)\Rightarrow(S_A(S_A(X))=X)$: $S_A(S_A(X))=X$ *fix (hyp1+2)* $S_A(X)$ *fix (hyp1+2)* X; *disjunktiv: Fall 1-3>FÄLLE, B* $S_A(S_A(X))=X$ ■

Rücktausch:

$S_A(X)=Y$ *kongruent* $S_A(S_A(X))=S_A(Y)$ *(5)* $X=S_A(Y)$ ■

selbstinvers:

$S_A\circ S_A$ *def* $\{(x,y)|y=S_A(S_A(x))\}$ *(5) hyp* $\{(x,y)|y=x\}$ *def* Id ■

Tauschfälle:

$X\in\{A\}\cup B\setminus\{0\}$ *distributiv* $(X\in\{A\})\vee(X\in B\setminus\{0\})$ *Ausnahme* $(X\in\{A\})\vee(X\in B)\cdot(X\notin\{0\})$ *gleich (hyp)* $(X=A)\vee(X\in B)\cdot(X\neq 0)$ ■

(6) $(X\in\mathsf{I})\cdot(S_A(X)\in B)=X\in S_A[B]$:

$(X\in\mathsf{I})\cdot(S_A(X)\in B)$ *quantifizieren* $\exists x:((S_A(X)=x)\cdot(x\in B))$ *Rücktausch* $\exists x:((X=S_A(x))\cdot(x\in B))$ *def erfüllt (hyp1)* $X\in S_A[B]$; *umgekehrt: erfüllt* $(\underline{X\in\mathsf{I}})\cdot\exists x:((X=S_A(x))\cdot(x\in B))$ *Rücktausch* $\exists x:((S_A(X)=x)\cdot(x\in B))$ *Tausch* $\exists x:(S_A(X)\in B)$ *ungebunden +U* $(X\in\mathsf{I})\cdot(S_A(X)\in B)$ ■

Variante:

$\underline{S_A(X)\in B=(X=A)\vee(X\in B)\cdot(X\neq 0)}$ *für drei Fälle*:

Fall 1 $X=A$: $S_A(A)\in B$ *vertauscht (hyp1)* $0\in B$ *hyp2-wahr* I *B* $\mathsf{I}\vee(A\in B)\cdot(A\neq 0)$ *reflexiv-wahr* $(A=A)\vee(A\in B)\cdot(A\neq 0)$;

Fall 2 $X=0$: $S_A(0)\in B$ *vertauscht (hyp1) +hyp3* $(A\in B)\cdot(A\notin B)$ *B* 0 *B* $0\cdot(0=A)$ *hyp2-falsch* $(0\notin B)\cdot(0=A)$ *Tausch* $(A\notin B)\cdot(0=A)$ *-hyp3* $0=A$ *B* $(A=0)\vee\mathsf{I}\cdot 0$ *hyp2-wahr, reflexiv-falsch* $(0=A)\vee(0\in B)\cdot(0\neq 0)$;

Fall 3 $(X\neq A)\cdot(X\neq 0)$: $S_A(X)\in B$ *fix (Fall 3)* $X\in B$ *+Fall 3/2* $(X\in B)\cdot(X\neq 0)$ *B* $0\vee(X\in B)\cdot(X\neq 0)$ *Fall 3/1-falsch* $(X=A)\vee(X\in B)\cdot(X\neq 0)$;
U (6) Tauschfälle $X\in S_A[B]=X\in\{A\}\cup B\setminus\{0\}$ *frei* $S_A[B]=\{A\}\cup B\setminus\{0\}$ ■

Original:
frei: $X\in S_A[B]$ *(6)* $S_A(X)\in B$ *disjunktiv: hyp1 hyp2 Tauschfälle>FÄLLE, B* $X\in B$;
umgekehrt: $\underline{X\in B}$ *disjunktiv: vertauscht/fix>FÄLLE* $(X=S_A(0))\vee(X=S_A(A))\vee(X=S_A(X))$
quantifizieren (elementar, hyp1, U) disjunktiv B $\exists x:((X=S_A(x))\cdot(X\in B))$ *erfüllt (hyp1-real hyp2, U)* $X\in S_A[B]$ ■

Wird die Tauschfunktion auf eine Potenz angewandt, entsteht eine Potenzvariante mit ähnlichen Eigenschaften; in Sonderfällen ist es auch die übliche Potenz:

Theoreme:	
$\mathcal{P}_0X=\mathcal{P}X$	*übliche Potenz*
$X\subseteq Y\Rightarrow\mathcal{P}_AX\subseteq\mathcal{P}_AY$	*monoton*
$A\in\mathbb{I}\Rightarrow(X\in\mathbb{B}\Rightarrow(\mathcal{P}_AX\neq F[X])\cdot(\mathcal{P}_AX\neq X))$	*kein Bild*
$X\in\mathbb{B}\Rightarrow\mathcal{P}_AX\in\mathbb{B}$	*Bildpotenz*
$(A\in\mathbb{I})\cdot(A\notin\mathcal{P}X)\Rightarrow\mathcal{P}_AX=\{A\}\cup\mathcal{P}X\setminus\{0\}$	*Potenzvariante*
$A\in\mathcal{P}X\Rightarrow\mathcal{P}_AX=\mathcal{P}X$	*Normalpotenz*
$(A\in\mathbb{I})\cdot\forall y\in X:(y\subseteq\mathcal{P}_Ay)\Rightarrow\bigcup X\subseteq\mathcal{P}_A\bigcup X$	*akkumulieren*

Beweise:
übliche Potenz:
$\underline{S_0=\mathrm{Id}}$: S_0 *def* $\{(x,y)|y=(x\cdot\neg(x=0)\vee 0\cdot(x=0))\}$ *Tausch* $\{(x,y)|y=(x\cdot\neg(x=0)\vee x\cdot(x=0))\}$ *B* $\{(x,y)|y=x\}$ *def* Id;
$\mathcal{P}_0X$ *def* $S_0[\mathcal{P}X]$ *U* $\mathrm{Id}[\mathcal{P}X]$ *identisches Bild* $\mathcal{P}X$ ■

monoton:
$X\subseteq Y$ *monoton für* $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}X\subseteq\mathcal{P}Y$ *monoton (für Bild)* $S_A[\mathcal{P}X]\subseteq S_A[\mathcal{P}Y]$ *def* $\mathcal{P}_AX\subseteq\mathcal{P}_AY$ ■

Potenzvariante:
extrem $0\subseteq X$ *erfüllt (elementar)* $0\in\mathcal{P}X$ *Variante (hyp)* $S_A[\mathcal{P}X]=\{A\}\cup\mathcal{P}X\setminus\{0\}$ *def* $\mathcal{P}_AX=\{A\}\cup\mathcal{P}X\setminus\{0\}$ ■

Normalpotenz:
extrem, erfüllt (elementar) $0\in\mathcal{P}X$ *Original (hyp)* $S_A[\mathcal{P}X]=\mathcal{P}X$ *def* $\mathcal{P}_AX=\mathcal{P}X$ ■

kein Bild:
indirekt: $\mathcal{P}_AX=F[X]$ *kongruent, def* $S_A[S_A[\mathcal{P}X]]=S_A[F[X]]$ *Bild vom Bild* $S_A\circ S_A[\mathcal{P}X]=S_A\circ F[X]$ *selbstinvers* $\mathrm{Id}[\mathcal{P}X]=S_A\circ F[X]$ *identisches Bild* $\mathcal{P}X=S_A\circ F[X]$ *kein Bild (für* $\mathcal{P}$*)-falsch (hyp1+2)* 0; *speziell Fall* $\mathcal{P}_AX\neq\mathrm{Id}[X]$ *identisches Bild* $\mathcal{P}_AX\neq X$ ■

Bildpotenz: $X\in\mathbb{B}$ *Bildpotenz für* $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}X\in\mathbb{B}$ *Bildbelegung* $S_A[\mathcal{P}X]\in\mathbb{B}$ *def* $\mathcal{P}_AX\in\mathbb{B}$ ■

akkumulieren

frei: $\underline{Z\in\bigcup X}$ *erfüllt* $\exists y{:}((Z\in y)\cdot(\underline{y\in X}))$ *hyp-speziell* $\exists y{:}((Z\in y)\cdot(y\subseteq\mathcal{P}_A y))$ *Syllogismus*
$\underline{\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}_A y)}$;

Fall 1 $Z=A$: *Fall 2* $A\in\mathcal{P}\bigcup X$: *Fall 1* $Z\in\mathcal{P}\bigcup X$ *Normalpotenz (Fall 2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;

Fall ¬2 $A\notin\mathcal{P}\bigcup X$: *Fall 1>hyp-existent* $Z\in\{A\}$ *extensiv* $Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}\bigcup X\setminus\{0\}$
Potenzvariante (hyp1, Fall ¬2) $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;

Fall 1-falsch $(Z=A)=0$ mit *Fall 2*: *Fall 3* $A\in\mathcal{P}y$: *Normalpotenz* $\mathcal{P}_A y=\mathcal{P}y$ *>U3*
$\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}y)$ *Potenzschranke(U2)* $\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}\bigcup X)$ *ungebunden, Normalpotenz (Fall 2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;

Fall ¬3 $A\notin\mathcal{P}y$: *Potenzvariante (hyp1) >U3* $\exists y{:}(Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}y\setminus\{0\})$ *distributiv, Ausnahme*
$\exists y{:}((Z\in\{A\})\vee(Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\notin\{0\}))$ *gleich (U1-real, elementar)*
$\exists y{:}((Z=A)\vee(Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\neq 0))$ *Fall 1-falsch, B* $\exists y{:}((Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\neq 0))$ *Potenzschranke (U2)*
$\exists y{:}(Z\in\mathcal{P}\bigcup X)$ *ungebunden* $Z\in\mathcal{P}\bigcup X$ *Normalpotenz (Fall 2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$;

Fall ¬2: *Potenzschranke (Kontraposition)>U2* $A\notin\mathcal{P}y$ *Potenzvariante (hyp1) >U3* $\exists y{:}(Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}y\setminus\{0\})$
distributiv, gleich (U1-real) $\exists y{:}((Z=A)\vee(Z\in\mathcal{P}y\setminus\{0\}))$ *Fall 1-falsch, B, Ausnahme*
$\exists y{:}((Z\in\mathcal{P}y)\cdot(Z\notin\{0\}))$ *Potenzschranke (U2)* $\exists y{:}((Z\in\mathcal{P}\bigcup X)\cdot(Z\notin\{0\}))$ *ungebunden, Ausnahme*
$Z\in\mathcal{P}\bigcup X\setminus\{0\}$ *extensiv* $Z\in\{A\}\cup\mathcal{P}\bigcup X\setminus\{0\}$ *Potenzvariante (hyp1,Fall ¬2)* $Z\in\mathcal{P}_A\bigcup X$ ∎

Neumann dehnte die Potenzen der leeren Menge ins Transfinite aus durch implizit rekursiv definierte Ränge, die bei Grenzzahlen vorige Ränge vereinigen. Dasselbe erreichen **explizit definierte Klassenränge** mit der Potenzvariante:

Definition:
$V_A := \bigcup\{f\in\mathrm{FOLGE}|\forall z\in\mathrm{Def}f{:}(f(z)=\mathcal{P}_A f(\bigcup z)\ \mathrm{FALLS}\ z\neq\bigcup z\ \mathrm{SONST}\ \bigcup f[z])\}$

Theoreme:

$V_A(0)=0$	*Startrang*
$X\in\mathbb{O}\Rightarrow V_A(X')=\mathcal{P}_A V_A(X)$	*Folgerang*
$(X\in\mathbb{O})\cdot(X=\bigcup X)\Rightarrow V_A(X)=\bigcup V_A[X]$	*Grenzrang*
$A\in\mathsf{I}\Rightarrow V_A(1)=\{A\}$	*Rang 1*
$X\in\mathbb{O}\Rightarrow V_A(X)\in\mathbb{B}$	*Realrang*
$(A\in\mathsf{I})\cdot(A\notin V_A(X))\cdot(Y\in\mathcal{P}_A V_A(X))\Rightarrow$ $(Y=A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(X\neq 0)$	*Teilrangvariante*
$(A\in V_A(X))\cdot(Y\in\mathcal{P}_A V_A(X))\Rightarrow Y\subseteq V_A(X)$	*Teilrang*
$X\in\mathbb{O}\Rightarrow Y\in\bigcup V_A[X]=\exists z\in X{:}(Y\in V_A(z))$	*Vorrang*

Beweise mit $\sigma_F := \mathcal{P}_A F(\bigcup\mathrm{Def}F)$, $\lambda_F := \bigcup\mathrm{Im}F$, $p_F := \mathrm{Def}F\neq\bigcup\mathrm{Def}F$:

(λ) $\lambda_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z]$, $\neg p_{F\restriction Z}\Rightarrow(\varphi_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z])$:
def $\lambda_{F\restriction Z}=\bigcup\mathrm{Im}(F\restriction Z)$ *>Einschränkung* $\lambda_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z]$ *bedingt definiert (hyp)* $\varphi_{F\restriction Z}=\bigcup F[Z]$ ∎

(σ) $(Z\in\mathbb{O})\cdot(Z=\mathrm{Def}F\restriction_Z)\cdot p_{F\restriction_Z}\Rightarrow(\sigma_{F\restriction_Z}=\mathcal{P}_A F(\bigcup Z))\cdot(\varphi_{F\restriction_Z}=\mathcal{P}_A F(\bigcup Z))$:

Vorgänger (hyp1, hyp3/2) $\underline{\bigcup Z\in Z}$; $\varphi_{F\restriction_Z}$ *bedingt definiert (hyp3)* $\sigma_{F\restriction_Z}$ *def*

$\mathcal{P}_A F\restriction_Z(\bigcup\mathrm{Def}(F\restriction_Z))$ *hyp2* $\mathcal{P}_A F\restriction_Z(\bigcup Z)$ *wertgleich (hyp1, U)* $\mathcal{P}_A F(\bigcup Z)$ ■

(1) $(F\in\mathrm{FOLGE})\cdot(Z\in\mathrm{Def}F)\Rightarrow(\varphi_{F\restriction_Z}=\mathcal{P}_A F(\bigcup Z)$ FALLS $Z\neq\bigcup Z$ SONST $\bigcup F[Z])$:

Zahlargumente (hyp1) $\mathrm{Def}F\in\mathbb{O}$ *Subzahl-Teilfunktion (hyp2)* $\underline{(Z\in\mathbb{O})\cdot(Z=\mathrm{Def}(F\restriction_Z))}$;

$\varphi_{F\restriction_Z}$ *def* $\sigma_{F\restriction_Z}\cdot p_{F_Z}\vee\lambda_{F\restriction_Z}\cdot\neg p_{F_Z}$ *(λ)(σ) disjunktiv (U)* $\mathcal{P}_A F(\bigcup Z)\cdot p_{F_Z}\vee\bigcup F[Z]\cdot\neg p_{F_Z}$

def, hyp2 $\mathcal{P}_A F(\bigcup Z)$ FALLS $Z\neq\bigcup Z$ SONST $\bigcup F[Z]$ ■

(δ) $\delta=V_A$: δ *def* $\bigcup\{f\in\mathrm{FOLGE}|\forall z\in\mathrm{Def}f:(f(z)=\varphi_{f\restriction_z})\}$ *(1)* V_A ■

(φ) $X\in\mathbb{O}\Rightarrow f_X$ mit $f_X:=(X\subseteq\mathrm{Def}\delta\Rightarrow\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathbb{B})$ *transfinite Induktion*:

Startfall f_0: *Teilfunktion* (f_0*-hyp)* $0=\mathrm{Def}\delta\restriction_0$ *>⋃leer, def of p* $\neg p_{\delta_0}$ *(λ)* $\varphi_{\delta\restriction_0}=\bigcup\delta[0]$

Leerfunktion $\varphi_{\delta\restriction_0}=\bigcup 0$ *⋃leer* $\varphi_{\delta\restriction_0}=0$ *>elementar* $\varphi_{\delta\restriction_0}\in\mathbb{B}$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$:

$f_{X'}$*-hyp* $\underline{X'\subseteq\mathrm{Def}\delta}$ *Teilfunktion* $\underline{X'=\mathrm{Def}\delta\restriction_{X'}}$ *>Nachfolger (hyp)* p_{δ_X} *(σ) (hyp-zählen, U2)*

$\varphi_{\delta\restriction_{X'}}=\mathcal{P}_A\delta(\bigcup(X'))$ *rückwärts (hyp)* $\underline{\varphi_{\delta\restriction_{X'}}=\mathcal{P}_A\delta(X)}$; *mitgezählt (hyp) +Subzahl (hyp-zählen)*

$(X\in X')\cdot(X\subseteq X')$ *Syllogismus (U1), transitiv (U1)* $(X\in\mathrm{Def}\delta)\cdot(X\subseteq\mathrm{Def}\delta)$ *Rekursion, hyp2*(f_X)

$(\delta(X)=\delta\restriction_X)\cdot(\delta\restriction_X\in\mathbb{B})$ *Tausch* $\delta(X)\in\mathbb{B}$ *Bildpotenz für* $\mathcal{P}_A$ $\mathcal{P}_A\delta(X)\in\mathbb{B}$ *U3* $\varphi_{\delta\restriction_{X'}}\in\mathbb{B}$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$:

f-hyp2 $\underline{X\subseteq\mathrm{Def}\delta}$ *def Teilfunktion* $X=\mathrm{Def}\delta\restriction_X$ *hyp2* $\neg p_{\delta_X}$ *(λ)* $\underline{\varphi_{\delta\restriction_X}=\bigcup\delta[X]}$;

hyp1 erfüllt $X\in\mathbb{M}$ *Bildart* $X\in\mathbb{B}$ *Bildbelegung* $\underline{\delta[X]\in\mathbb{B}}$;

$\underline{\delta[X]\subseteq\mathbb{B}}$ *frei*: $Y\in\delta[X]$ *def erfüllt* $\exists z:(\underline{(Y=\delta(z))}\cdot(z\in X))$ *Syllogismus (U4), Subzahl(hyp1)*

$\exists z:((z\in\mathrm{Def}\delta)\cdot(z\subseteq X))$ *Rekursion transitiv (U4)* $\exists z:(\underline{(\delta(z)=\varphi_{\delta\restriction_z})}\cdot(z\subseteq\mathrm{Def}\delta))$

(hyp3-speziell (U9) $\exists z:(\varphi_{\delta\restriction_z}\in\mathbb{B})$ *U10, U8, ungebunden* $\underline{Y\in\mathbb{B}}$;

Bildvereinigung (U6+7) $\bigcup\delta[X]\in\mathbb{B}$ *U5* $\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathbb{B}$ ■

Realrang und *Realwerte*:

$X\in\mathbb{O}$ *(φ)* $X\subseteq\mathrm{Def}\delta\Rightarrow\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathbb{B}$ *>hyp2* $\underline{\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathbb{B}}$ *real* $\varphi_{\delta\restriction_X}\in\mathsf{I}$ ■

U transfinite Rekursion $\delta(X)\in\mathbb{B}$ *(δ)* $V_A(X)\in\mathbb{B}$ ■

Startrang:

Zahl $0\in\mathbb{O}$ *Transfinität (Realwerte)* $0\in\mathrm{Def}\delta$ *Grenzwert (⋃leer)* $\delta(0)=\lambda_{\delta\restriction_0}$ *(δ)(λ)*

$V_A(0)=\bigcup\delta[0]$ *Leerfunktion* $V_A(0)=0$ ■

Folgerang:

hyp-zählen, Teilrekursion $\underline{X'=\mathrm{Def}(\delta\restriction_{X'})}$ *>Nachfolger (hyp)* $\underline{p_\delta}$;

$V_A(X')$ *(δ)* $\delta(X')$ *Folgewert (Realwerte, hyp)* $\sigma_{\delta\restriction_{X'}}$ *(σ) (hyp-zählen, U1, U2)*

$\mathcal{P}_A\delta(\bigcup(X'))$ *rückwärts (hyp), (δ)* $\mathcal{P}_A V_A(X)$ ■

Grenzrang:
$V_A(X)$ *(δ)* $\delta(X)$ *Grenzwert (Realwerte, hyp)* $\lambda_{\delta\restriction X}$ *(λ)* $\bigcup\delta[X]$ *(δ)* $\bigcup V_A[X]$ ■

Rang 1:
$V_A(1)$ *def* $V_A(0')$ *Folgerang* $\mathcal{P}_A V_A(0)$ *Startrang* $\mathcal{P}_A 0$ *def* $S_A[\mathcal{P}0]$ *Nullpotenz* $S_A[\{0\}]$ *Einzelbild* $\{S_A(0)\}$ *vertauscht (hyp)* $\{A\}$ ■

Teilrangvariante:
$Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)$ *Variante (hyp1)* $Y\in\{A\}\vee\mathcal{P}V_A(X)\setminus\{0\}$ *Tauschfälle*
$(Y=A)\vee(Y\in\mathcal{P}V_A(X))\cdot(Y\neq 0)$ *erfüllt* $(Y=A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(Y\neq 0)$ ■

Teilrang:
$Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)$ *Original* $Y\in\mathcal{P}V_A(X)$ *erfüllt* $Y\subseteq V_A(X)$ ■

Vorrang:
$Y\in\bigcup V_A[X]$ *Wertelement* $\exists\underline{z\in X}:((Y\in V_A(z))\cdot(V_A(z)\in\mathbb{I}))$ *-real rank (hyp U Subzahl)*
$\exists z\in X:(Y\in V_A(z))$ ■

Bei inexistenten Startklassen wie der Russell-Klasse, der Klasse aller Ordinalzahlen oder der Klasse aller Mengen ergeben sich leere Ränge und leere Hierarchien. Nur bei einer existenten Startklasse entstehen durch Vereinigung aller Ränge effektive **kumulative Hierarchien**, deren Ränge eine aufsteigende Inklusionskette abbildbarer Klassen bilden:

Definition:
DIE HIERARCHIE ÜBER $A := \mathbb{V}_A := \bigcup V_A[\mathbb{O}]$

Theoreme:

$A\notin\mathbb{I}\Rightarrow(\mathbb{V}_A=0)$, $\mathbb{V}_\dagger=0$, $\mathbb{V}_\mathbb{M}=0$, $\mathbb{V}_\mathbb{O}=0$	*leere Hierarchie*
$\mathbb{V}_A\subseteq\mathbb{B}\cup\{A\}$, $A\in\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{V}_A\subseteq\mathbb{B}$	*abbildbar*
$A\in\mathbb{I}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{O}:\forall z\in x:(V_A(z)\subset V_A(x))$	*kumulative Hierarchie*

Beweise:
(0): $A\notin\mathbb{I}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{O}:(V_A(x)=0)$ mit $f_X:=(V_A(X)=0)$ *transfinite Induktion*:
Startfall f_0: *Startrang* $V_A(0)=0$ ■
Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $V_A(X')$ *Folgerang* $\mathcal{P}_A V_A(X)$ *hyp2-def* $\mathcal{P}_A 0$ *def* $S_A[\mathcal{P}0]$ *Nullpotenz* $S_A[\{0\}]$ *Einzelbild* $\{S_A(0)\}$ *Tauschlücke, nicht existent* 0 ■
Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$:
Fall $X=0$: *Startfall* f_0; *Fall* $\underline{X\neq 0}$: $V_A(X)$ *Grenzrang (hyp1+2)* $\bigcup V_A[X]$ *Leerfunktion (hyp3, Fall)* $\bigcup\{0\}$ *∪Einheit (elementar)* 0 ■
leere Hierarchie:
$\mathbb{V}_A$ *def* $\bigcup\{y|\exists x:((y=V_A(x))\cdot(x\in\mathbb{O}))\}$ *(0)(hyp)* $\bigcup\{y|\exists x:((y=0)\cdot(x\in\mathbb{O}))\}$

$\bigcup\{y|(y=0)\cdot\exists x:(x\in\mathbb{O})\}$ *nichtleer* $\bigcup\{y|(y=0)\cdot(\mathbb{O}\neq 0)\}$ *-Zahl nichtleer* $\bigcup\{y|y=0\}$ *def* $\bigcup\{0\}$ *⋃Einheit (elementar)* 0 ■

(1) $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(Y\in V_A(X))\cdot(Y\neq A)\Rightarrow Y\in\mathbb{B}$: *transfinite Induktion* mit $f_X:=(Y\in V_A(X))\cdot(Y\neq A)\Rightarrow Y\in\mathbb{B}$:

Startfall f_0: *f_0-hyp1* $Y\in V_A(0)$ *Startrang* $Y\in 0$ *leer-falsch* 0 *B(ex falso quodlibet)* $Y\in\mathbb{B}$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: *$f_{X'}$-hyp* $Y\in V_A(X')$ *Folgerang* $\underline{Y\in\mathcal{P}_A V_A(X)}$ *Fall* $A\in V_A(X)$ *Teilrang* $Y\subseteq V_A(X)$, *U1 Fall* $A\notin V_A(X)$ *Teilrangvariante* $(Y=A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(X\neq 0)$ *f_X-hyp2-falsch B* $Y\subseteq V_A(X)$; *beide Fälle +Realrang, Teilbild* $Y\in\mathbb{B}$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$: *f-hyp1* $Y\in V_A(X)$ *Grenzrang* $Y\in\bigcup V_A[X]$ *Vorrang* $\exists z:((\underline{Y\in V_A(z)})\cdot(z\in X))$ *hyp3-speziell f_z >f-hyp2+U2* $Y\in\mathbb{B}$ ■

abbildbar:

frei: *Fall 1* $X=A$: $X\in\mathbb{V}_A$ *real-existent* $X\in\{X\}$ *Fall 1* $X\in\{A\}$ *extensiv* $X\in X\in\mathbb{B}\cup\{A\}$;

Fall 2 $X\neq A$: $X\in\mathbb{V}_A$ *def, Vorrang* $\exists z:((\underline{X\in V_A(z)})\cdot(z\in\mathbb{O}))$ *(1) >U1, Fall 2* $\exists z:(X\in\mathbb{B})$ *ungebunden* $X\in\mathbb{B}$ *extensiv* $X\in\mathbb{B}\cup\{A\}$ ■

$A\in\mathbb{B}$ *individuell def* $\{A\}=\{A\}\cdot\mathbb{B}$ *kongruent* $\mathbb{B}\cup\{A\}=\mathbb{B}\cup\{A\}\cdot\mathbb{B}$ *B* $\mathbb{B}\cup\{A\}=\mathbb{B}$ *>abbildbar1* $\mathbb{V}_A\subseteq\mathbb{B}$ ■

(2) $(A\in\mathsf{I})\cdot(X\in\mathbb{O})\Rightarrow V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ mit $f_X:=V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ *transfinite Induktion*:

Startfall f_0: *extrem* $0\subseteq\mathcal{P}_A V_A(0)$ *Startrang* $V_A(0)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(0)$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ *monoton* $\mathcal{P}_A V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A\mathcal{P}_A V_A(X)$ *Folgerang* $V_A(X')\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X')$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$: *hyp3* $\forall z\in X:V_A(z)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(z)$ *akkumulieren (hyp)* $\bigcup V_A[X]\subseteq\mathcal{P}_A\bigcup V_A[X]$ *Grenzrang* $V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X)$ ■

(3) $(Z\in X)\cdot(X\in\mathbb{O})\Rightarrow V_A(Z)\subseteq\bigcup V_A[X]$:

frei: $Y\in V_A(Z)$ *quantifizieren (hyp1)* $\exists z\in X:(Y\in V_A(z))$ *Vorrang (hyp2)* $Y\in\bigcup V_A[X]$ ■

kumulative Hierarchie: mit $f_X:=\forall z\in X:(V_A(z)\subset V_A(X))$ *transfinite Induktion*:

Startfall f_0 *frei*: $Z\in 0$ *+nichtleer* $(Z\in 0)\cdot(Z\notin 0)$ *B(ex falso quodlibet)* $V_A(Z)\subset V_A(0)$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: *(2) (hyp) +kein Bild (Realrang)* $(V_A(X)\subseteq\mathcal{P}_A V_A(X))\cdot(V_A(X)\neq\mathcal{P}_A V_A(X))$ *def, Folgerang (hyp1)* $\underline{V_A(X)\subset V_A(X')}$;

$f_{X'}$ generell: $Z\in X'$ *vorher (hyp1)* $(Z\in X)\vee(Z=X)$ *f_X-speziell (=hyp2) disjunktiv* $(V_A(Z)\subset V_A(X))\vee(Z=X)$ *disjunktive: U-transitiv, >U, B* $V_A(Z)\subset V_A(X')$ ■

Grenzfall detailliert $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall y\in X:\forall z\in y:(V_A(z)\subset V_A(y))\Rightarrow f_X)$:

f_X generell: $Z\in X$ *mitgezählt (Subzahl), Zählgrenze (hyp1+2)* $(Z\in Z')\cdot(Z'\in X)$ *hyp3-speziell(hyp2) +(3)* $(V_A(Z)\subset V_A(Z'))\cdot(V_A(Z')\subseteq\bigcup V_A[X])$ *transitiv* $V_A(Z)\subset\bigcup V_A[X]$ *Grenzrang (hyp1+2)* $V_A(Z)\subset V_A(X)$ ■

Neumanns Mengenhierarchie ist der Fall V_0 mit der *üblichen Potenz* $\mathcal{P}_0X{=}\mathcal{P}X$. Das hält ein Korollar in vereinfachter Schreibweise fest:

Definitionen:
$V := V_0$
NEUMANNS HIERARCHIE $:= \mathbb{V}_0$

Theoreme:

$V(0){=}0$	*Startrang*
$X{\in}\mathbb{O} \Rightarrow V(X'){=}\mathcal{P}V(X)$	*Folgerang*
$(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(X{=}\bigcup X) \Rightarrow V(X){=}\bigcup V[X]$	*Grenzrang*
$V(1){=}\{0\}$	*Mengenrang 1*
$V(2){=}\{0,\{0\}\}$	*Mengenrang 2*
$V(3){=}\{0,\{0\},\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$	*Mengenrang 3*
$\mathbb{V}_0{\subseteq}\mathbb{M}$	*Mengenhierarchie*

Das Hierarchieschema gilt natürlich auch für Urelemente. Für sie ergibt sich über eine einfache transfinite Induktion die übliche Potenz und eine größere Hierarchie, die $\mathbb{V}_0$ als echten Teil umfasst:

Theoreme:

$(A{=}\{A\}){\cdot}(X{\in}\mathbb{O}){\cdot}(1{\in}X) \Rightarrow V_A(X'){=}\mathcal{P}V_A(X)$	*Potenzränge*
$(A{=}\{A\}) \Rightarrow V_A(1){=}\{A\}$	*Urelementrang 1*
$(A{=}\{A\}) \Rightarrow V_A(2){=}\{0,A\}$	*Urelementrang 2*
$(A{=}\{A\}) \Rightarrow V_A(3){=}\{0,A,\{0\},\{0,A\}\}$	*Urelementrang 3*

Hier interessieren jedoch **reguläre Hierarchien**, bei denen in jedem Rang die leere Menge vertauscht wird. Beispiele sind $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$. Sie entstehen, wenn die Startklasse keine Teilklasse eines Rangs ist:

Theorem:
$(A{\in}\mathsf{I}){\cdot}\forall x{\in}\mathbb{O}{:}(A{\not\subseteq}V_A(x)) \Rightarrow$

$X{\in}\mathbb{O} \Rightarrow V_A(X'){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X){\setminus}\{0\}$	*regulärer Rang*
$V_A(1){=}\{A\}$	*Rang 1*
$V_A(2){=}\{A,\{A\}\}$	*Rang 2*
$V_A(3){=}\{A,\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}$	*Rang 3*

Beweise:
regulärer Rang:

hyp2-speziell (hyp3) def $\neg(A{\subseteq}V_A(X))$ *erfüllt (hyp1), def* $A{\notin}\mathcal{P}V_A(X)$ *Potenzvariante (hyp1)*
$\mathcal{P}_AV_A(X){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X){\setminus}\{0\}$ *Folgerang (hyp3)* $V_A(X'){=}\{A\}{\cup}\mathcal{P}V_A(X){\setminus}\{0\}$ ∎

(1) $0\notin X \Rightarrow X=X\setminus\{0\}$:
$0\notin X$ *def* $\{0\}\cdot X=0$ *kongruent* $X\setminus\{0\}\cup\{0\}\cdot X=X\setminus\{0\}\cup 0$ *B* $X=X\setminus\{0\}$ ■

(2) $A\in\mathbb{I}\Rightarrow 0\notin\{\{A\}\}$: *indirekt* $0\in\{\{A\}\}$ *gleich* $0=\{A\}$ *hyp-existent-falsch* 0 ■

(3) $A\in\mathbb{I}\Rightarrow 0\notin\{\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}$: *indirekt* $0\in\{\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}$ *mehrdeutig*
$(0=\{A\})\vee(0=\{\{A\}\})\vee(0=\{A,\{A\}\})$ *distributiv: hyp-existent-falsch, elementar-falsch, >aufgezählt(hyp), B* $A\in 0$ *leer-falsch, B* 0 ■

Rang 2:
$V_A(2)$ *def* $V_A(1')$ *regulärer Rang (hyp1 hyp2-speziell(Zahl))* $\{A\}\cup\mathcal{P}V_A(1)\setminus\{0\}$ *Rang 1*
$\{A\}\cup\mathcal{P}\{A\}\setminus\{0\}$ *Einheitspotenz* $\{A\}\cup\{0,\{A\}\}\setminus\{0\}$ *def B* $\{A\}\cup\{\{A\}\}\setminus\{0\}$
(2)(1) $\{A\}\cup\{\{A\}\}$ *def* $\{A,\{A\}\}$ ■

Rang 3:
$V_A(3)$ *def* $V_A(2')$ *regulärer Rang (hyp1 hyp2-speziell(Zahl)* $\{A\}\cup\mathcal{P}V_A(2)\setminus\{0\}$ *Rang 2*
$\{A\}\cup\mathcal{P}\{A,\{A\}\}\setminus\{0\}$ *Paarpotenz* $\{A\}\cup\{0,\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}\setminus\{0\}$ *B def*
$\{A\}\cup\{\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}\setminus\{0\}$ *(3)(1) def* $\{A,\{A\},\{\{A\}\},\{A,\{A\}\}\}$ ■

Das Hierarchieschema funktioniert auch beim Überschreiten der Mengenlehre. In der binären Logik von Leibniz existiert nicht nur die leere Menge 0, sondern auch ihr Komplement $\mathbb{I}$, was in der üblichen Mengenlehre mit einem Mengenuniversum Cantors Antinomie erzeugt [97]: Sie entsteht allein durch die Annahme $\mathbb{M}=\mathbb{I}$. Da alle wichtigen Resultate der Mengenlehre im extensionalen Universum auch ohne diese Annahme beweisbar sind, lässt sie sich als unnötig mit Ockhams Rasiermesser beseitigen. Dann kann man das Universum ohne Risiko als existent betrachten und erhält die binäre Logik von Leibniz, für die es einige äquivalente Axiome gibt:

Definitionen:
IMMANENT := BILD
$\mathbb{T}$:= TRANSZENDENT := NICHT-BILD

Theoreme in $\mathbb{E}$:

Cantor- oder ZF-Mengenlehre $\vdash \mathbb{M}=\mathbb{I}$ $\vdash \mathbb{I}\notin\mathbb{I}$	*Mengenuniversum*	[96f]
$\mathbb{L}$ $\dashv\vdash$ $\mathbb{I}$ IST WAHR $\dashv\vdash$ $\mathbb{I}$ IST EXISTENT	*die Wahrheit existiert*	
$\mathbb{L}$ $\dashv\vdash$ $\mathbb{I}$ IST WAHR UND 0 IST FALSCH	*binäre Logik*	
$\mathbb{L}$ $\dashv\vdash$ $\mathbb{L}=\mathbb{I}$ $\dashv\vdash$ $\mathbb{L}=\mathbb{E}$	*Leibniz-Universum*	
$\mathbb{L}$ $\dashv\vdash$ $\mathbb{I}\in\mathbb{L}$ $\dashv\vdash$ $\mathbb{I}$ IST TRANSZENDENT	*Transzendenz*	

Beweise:
die Wahrheit existiert:
$\mathbb{L}$ *def Binärsynonym B* $(\mathbb{I}\in\{\mathbb{I}\})\cdot\mathbb{E}$ *-Prämisse* $\mathbb{E}$*, def* $\mathbb{I}$ IST WAHR ■

binäre Logik:

$\mathbb{L}$ *def Binärsynonym, Falsifizierbarkeit B* $(\mathsf{I}\in\{\mathsf{I}\})\cdot(0\in\{0\})\cdot\mathbb{E}$ *-Prämisse* $\mathbb{E}$*, def* I IST WAHR UND 0 IST FAL

Leibniz-Universum:

$\mathbb{L}$ *Urteil* $\mathbb{L}=\mathsf{I}$ *+Prämisse* $\mathbb{L}=\mathsf{I}\cdot\mathbb{E}$ *B* $\mathbb{L}=\mathbb{E}$ ∎

(2) $(\mathsf{I}=F[X])\Rightarrow(\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}\circ F[X]=\mathcal{P}X)$:

$\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}\circ F[X]$ *Bild vom Bild* $\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}[F[X]]$ *hyp* $\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}[\mathsf{I}]$ *def* $\mathsf{Im}(\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X})$ *Einschränkung*
$\mathsf{Id}[\mathcal{P}X]$ *identisches Bild* $\mathcal{P}X$ ∎

(3) $\mathsf{I}\notin\mathbb{B}$ *indirekt*: $\mathsf{I}\in\mathbb{B}$ *erfüllt* $\exists f{:}((\mathsf{I}=f(x))\cdot(x\in\mathbb{M}))$ *(2)* $\exists f{:}((\mathsf{Id}\restriction_{\mathcal{P}X}\circ f[x]=\mathcal{P}X)\cdot(x\in\mathbb{M}))$
kein Bild-falsch $\exists f{:}(0\cdot(x\in\mathbb{M}))$ *ungebunden B* 0 ∎

Transzendenz:

$\mathbb{L}$ *die Wahrheit existiert, def* $\mathsf{I}\in\mathsf{I}$ *Leibniz-Universum* $\mathsf{I}\in\mathbb{L}$ *real +(3)* $(\mathsf{I}\in\mathsf{I})\cdot(\mathsf{I}\notin\mathbb{B})$ *Ausnahme* $\mathsf{I}\in\neg\mathbb{B}$ *def*
$\mathsf{I}\in\mathbb{T}$ *real* $\mathsf{I}\in\mathsf{I}$ *die Wahrheit existiert* $\mathbb{L}$ ∎

Die Existenz der Wahrheit tangiert die Theologik der *Monadologie* [1], in der Leibniz einen korrekten Gottesbeweis führte mit einer Definition äquivalent zu GOTT$=\{\mathsf{I}\}$; er ist im Abschnitt zur universellen philosophischen Sprache in [5] [240] und bereits in [3] analysiert. In seiner binären Logik hat die Existenz der Wahrheit jedoch eine weiter reichende Wirkung: Sie erzeugt die **Wahrheitshierarchie**, eine immanente Welt, rekursiv generiert durch vertauschte Wahrheitswerte. Sie ist so mächtig wie die Mengenwelt, weil sie eine bijektive Projektion von Neumanns Hierarchie in eine Klasse abbildbarer Nichtmengen ist. Dies folgt als Korollar aus einem allgemeinen Satz für Hierarchien, die von einer transzendenten Klasse erzeugt werden:

Theoreme:	
$A\in\mathbb{T}\Rightarrow(\mathbb{M}\subset\mathbb{B})\cdot(\mathbb{B}\subset\mathsf{I})$	*höheres Universum*
$A\in\mathbb{T}\Rightarrow V_A(X')=\{A\}\cup\mathcal{P}V_A(X)\setminus\{0\}$	*reguläre Ränge*
$A\in\mathbb{T}\Rightarrow(\mathbb{V}_A\subseteq\neg\mathbb{M})\cdot(\mathbb{V}_A\subseteq\neg\mathbb{V}_0)$	*mögliche Welten*

Theoreme in $\mathbb{L}$:	
I IST TRANSZENDENT	*Transzendenz*
$X\in\mathbb{O}\Rightarrow V_{\mathsf{I}}(X')=\{\mathsf{I}\}\cup\mathcal{P}V_{\mathsf{I}}(X)\setminus\{0\}$	*regulärer Wahrheitsrang*
$V_{\mathsf{I}}(1)=\{\mathsf{I}\}$	*Wahrheitsrang 1*
$V_{\mathsf{I}}(2)=\{\mathsf{I},\{\mathsf{I}\}\}$	*Wahrheitsrang 2*
$V_{\mathsf{I}}(3)=\{\mathsf{I},\{\mathsf{I}\},\{\{\mathsf{I}\}\},\{\mathsf{I},\{\mathsf{I}\}\}\}$	*Wahrheitsrang 3*
$\mathbb{V}_{\mathsf{I}}\subseteq\mathbb{B}\cup\{\mathsf{I}\}$	*Immanenz*
$(\mathbb{V}_{\mathsf{I}}\subseteq\neg\mathbb{M})\cdot(\mathbb{V}_{\mathsf{I}}\subseteq\neg\mathbb{V}_0)$	*übernatürliche Welt*

Beweise:

(1) $A\in\mathbb{T}\Rightarrow A\notin\mathbb{M}$:

$_{indirekt}\ A\in\mathbb{M}\ _{Bildart}\ A\in\mathbb{B}\ _{hyp\text{-}def\text{-}Ausnahme\text{-}falsch}\ 0$ ■

höheres Universum:

$\underline{\mathbb{B}\neq\mathbb{I}}\ _{indirekt}$: $\mathbb{B}=\mathbb{I}\ _{>hyp}\ A\notin\mathbb{I}\ _{hyp\text{-}real\text{-}falsch}\ 0$; $_{extrem\ +U1}\ (\mathbb{B}\subseteq\mathbb{I})\cdot(\mathbb{B}\neq\mathbb{I})\ _{def}\ \mathbb{B}\subset\mathbb{I}$ ■

$\underline{\mathbb{M}\neq\mathbb{B}}\ _{indirekt}$: $\mathbb{M}=\mathbb{B}\ _{>elementar}\ \{A\}\in\mathbb{M}\ _{Mengen\ von\ Mengen\ +hyp\text{-}existent}\ (A\in\{A\})\cdot(\{A\}\subseteq\mathbb{M})$
$_{Syllogismus}\ A\in\mathbb{M}\ _{(1)\text{-}falsch}\ 0$; $_{Bildart\ +U3}\ (\mathbb{M}\subseteq\mathbb{B})\cdot(\mathbb{M}\neq\mathbb{B})\ _{def}\ \mathbb{M}\subset\mathbb{B}$ ■

(2) $A\notin\mathbb{B}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{O}:(A\not\subseteq V_A(x))$.

$_{generell,\ indirekt}\ A\subseteq V_A(X)\ _{Realrang}\ (A\subseteq V_A(X))\cdot(V_A(X)\in\mathbb{B})\ _{Teilbild}\ A\in\mathbb{B}\ _{hyp1\text{-}falsch}\ 0$ ■

reguläre Ränge:

$A\in\mathbb{T}\ _{def}\ A\in\neg\mathbb{B}\ _{Ausnahme}\ (A\in\mathbb{I})\cdot(A\notin\mathbb{B})\ _{(2)}\ (A\in\mathbb{I})\cdot\forall x\in\mathbb{O}:(A\not\subseteq V_A(x))\ _{regulärer\ Rang}$
$V_A(X')=\{A\}\cup\mathcal{P}V_A(X)\setminus\{0\}$ ■

(3) $(R\subseteq\neg\mathbb{M})\cdot(R\neq 0)\Rightarrow R\notin\mathbb{M}$:

$_{indirekt}$: $R\in\mathbb{M}\ _{Mengen\ von\ Mengen}\ R\subseteq\mathbb{M}\ _{def\ +hyp1\text{-}def}\ (R=R\cdot\mathbb{M})\cdot(R=R\cdot\neg\mathbb{M})\ _{Tausch}$
$R=R\cdot\neg\mathbb{M}\cdot\mathbb{M}\ _{B}\ R=0\ _{hyp2\text{-}falsch}\ 0$ ■

(4) $A\in\mathbb{T}\Rightarrow X\in\mathbb{O}\Rightarrow(V_A(X)\subseteq\neg\mathbb{M})$ mit $f_X:=V_A(X)\subseteq\neg\mathbb{M}\ _{transfinite\ Induktion}$:

Startfall f_0: $_{extrem}\ 0\subseteq\neg\mathbb{M}\ _{Startrang}\ V_A(0)\subseteq\neg\mathbb{M}$ ■

Zählfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow(f_X\Rightarrow f_{X'})$: $f_{X'}\ _{frei}$: $\underline{Y\in V_A(X')}\ _{reguläre\ Ränge,\ Teilrangvariante}$
$(Y=A)\vee(Y\subseteq V_A(X))\cdot(X\neq 0)\ _{disjunktiv:\ Zählfall\text{-}hyp2\ transitiv}$
$(Y=A)\vee(Y\subseteq\neg\mathbb{M})\cdot(X\neq 0)\ _{disjunktiv:\ (1)(hyp)\ (3),\ B}\ Y\notin\mathbb{M}\ _{Ausnahme\ (U\text{-}real)}\ Y\in\neg\mathbb{M}$ ■

Grenzfall $X\in\mathbb{O}\Rightarrow((X=\bigcup X)\cdot\forall z\in X:f_z\Rightarrow f_X)$: $_{f_X\ frei}$: $Y\in V_A(X)\ _{Grenzrang}$
$Y\in\bigcup V_A[X]\ _{Vorrang}\ \exists z\in X:(Y\in V_A(z))\ _{+hyp3\text{-}speziell\ f_z\ Syllogismus}\ Y\in\neg\mathbb{M}$ ■

mögliche Welten:

$_{frei}$: $X\in\mathbb{V}_A\ _{def}\ X\in\bigcup V_A[\mathbb{O}]\ _{Vorrang\ (hyp)}\ \exists z\in\mathbb{O}:(X\in V_A(z))\ _{+(4)\ Syllogismus,\ ungebunden}$
$X\in\neg\mathbb{M}$ ■

$_{mögliche\ Welten1}\ \mathbb{V}_A\subseteq\neg\mathbb{M}\ _{+Mengenhierarchie\ Kontraposition(B)}\ (\mathbb{V}_A\subseteq\neg\mathbb{M})\cdot(\neg\mathbb{M}\subseteq\neg\mathbb{V}_0)\ _{transitiv}$
$\mathbb{V}_A\subseteq\neg\mathbb{V}_0$ ■

Die Wahrheitshierarchie ist auch ein Teil von Peanos komplementärer Logik $\mathbb{K}$, in der $\mathbb{L}$ bewiesen wurde. In seiner Logik existieren Komplemente aller Mengen und realen Klassen. Somit gibt es immens mehr potentielle Bilder und isomorphe Hierarchien. Aus Sicht der Mengenlehre, die nur die unterste Hierarchie umfasst, ist dies ein **logisches Multiversum, eingebettet ins transzendente Universum**.

References

[1] Leibniz, G.W.: Monadologie, 1714.
https://fr.wikisource.org/wiki/Monadologie
dt. Übersetzung 1720: https://www.projekt-gutenberg.org/leibniz/monaden/monaden.html
§1: Existenz (substance) von Individuen (monads)
§2: Existenz ihrer Vereinigung (aggregatum)
§31: Existenz von Falschem und Wahrem
§35: Existenz von identischen Aussagen
§38: Gottesdefinition (Dieu=substance nécessaire)
§39: Monotheistischer Gottesbeweis (il n'y a qu'un Dieu)

[2] Neumaier, Wilfried: Aristotelische Logiken, Olms, Hildesheim, Zürich, New York, 2013; pp. 67ff Ableitung der Aussagenkalküle von Frege/Lukasiewicz und Russell/Bernays.
Inhalt: https://neumaier-wilfried.de/logik

[3] Neumaier, Wilfried: Universum und Individuum - logisch betrachtet, in: Natur und Subjekt, IX. Internationaler Leibniz-Kongress, Hannover 2011, Vorträge 2. Teil, 729-737.

[4] Neumaier, Wilfried: Universallogik. Eine Synthese klassischer Logiken von Aristoteles, Leibniz, Boole, Frege, Peano, Cantor, Zermelo, Olms, Hildesheim, Zürich, New York, 2020.
Inhalt: https://neumaier-wilfried.de/logik

[5] Neumaier, Wilfried: Verbale Logik. Ein Grammatik-Kalkül nach Ideen von Leibniz und Peano = [4, Teil II, p.187–266].
Inhalt: https://neumaier-wilfried.de/logik

[6] Peano, Giuseppe: Arithmethices principia nova methodo exposita, Turin 1889.

[7] Peano, Giuseppe: Logique mathématique = Formulaire de Mathématiques, Tome II, §1, Turin 1897.
https://archive.org/details/formulairedemat02peangoog
Axiome: (22)(105) und stillschweigende Prämisse $\{A\}\in\mathbb{K}$ im Beweis von (422), siehe [4, p.83].

Titelfoto: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giuseppe_Peano.jpg
Public Domain