

DOPPELTER KONTRAPUNKT



Heft 4
Wilfried Neumaier
Februar 2026

Musik-Mathematik
kurz gefasst

Im Heft **KONTRAPUNKT ODER KOMPOSITION** [Kp], das die Mathematik des Kontrapunkts präzisiert, ist eine Spezialtechnik noch ausgeklammert: der doppelte Kontrapunkt. Erstmals behandelte **Nicola Vicentino** (1511-1576) dieses Thema in seinem Buch *L'antica musica ridotta alla moderna prattica* 1555 [V]. Er erklärte den doppelten Kontrapunkt als doppelte Komposition, und zwar als eine Art Kanon (fuga), der kein eigentlicher Kanon ist, sich aber manchmal als Kanon zwischen Ober- und Unterstimme zu einem Cantus firmus einpassen lässt.^{V34} Das heißt: Wie bei einem Kanon wird aus einer Komposition eine zweite abgeleitet, entweder als separate Komposition oder vereinigt mit der ersten als Kanon. Seine Beispiele zeigen, dass er den doppelten Kontrapunkt nicht bloß als Stimmtauschtechnik verstand, wie es später üblich wurde. Diese Technik behandelte er natürlich auch, und zwar gleich im ersten Beispiel; es ist ein **doppelter Kontrapunkt der Dezime**, bei dem er die Oberstimme um eine Dezime verschob unter den Cantus firmus in ganzen Noten:^{V34} Notenbeispiel 1

(1) Doppelter Kontrapunkt 1

zweite Auflösung:

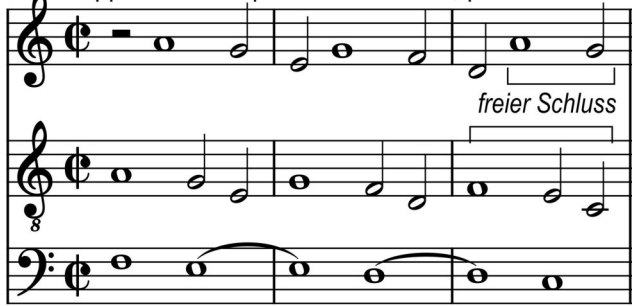
Für doppelte Kontrapunkte der Dezime gilt sein Verbot von Terz- und Sextparallelen, da sie verbotene Oktav- oder Quintparallelen erzeugen können.

Sein zweites Beispiel geht bereits über die Stimmtauschtechnik hinaus: Es ist ein **doppelter Kontrapunkt mit Zeitversetzung** nach einer Pause. Er notierte nur eine zweistimmige Auflösung, deutete aber eine dreistimmige Auflösung verbal an durch eine Kanonvorschrift, die wohl einen Dezimparallelkanon zum Cantus firmus meint:^{V34} Notenbeispiel 2

(2) Doppelter Kontrapunkt 2 zweite Auflösung: A tre voci alla decima sopra:

Er fügte noch zwei weitere doppelte Kontrapunkte mit Zeitversetzung hinzu, einen gleich dreistimmig kombiniert zum Oktavkanon (mit freiem Schluss) über einem Cantus firmus in langen Noten:^{V34} Notenbeispiel 3+4

(3) Doppelter Kontrapunkt 3: A tre voci, per ottava



Doppelter Kontrapunkt 4



Vicentino hatte kurz vorher ein Beispiel für einen Umkehrungskanon gegeben, bei dem er die Melodie exakt an einer Tonhöhenachse spiegelte, so dass alle Intervalle nur die Richtung wechseln:^{V32} Notenbeispiel 3

(4) Kanon in exakter Umkehrung



Im nächsten Kapitel zum doppelten Kontrapunkt nutzte er auch Umkehrungen, jedoch nicht exakt gespiegelt, sondern mit alterierten Tönen. Das belegt ein **doppelter Kontrapunkt der Umkehrung**, bei dem er an den mit ♭ markierten Noten von der exakten Umkehrung abwich:^{V35} Notenbeispiel 2

(5) Doppelter Kontrapunkt 6



Eine alterierte Umkehrung benutzte er auch in einem vierstimmigen Kontrapunkt, bei dem er zur freien Tenor- und Altstimme einen Umkehrungskanon komponierte. Er beschränkte sich hierbei (wie meist) auf eine kurze Skizze, die einem Schüler zeigen soll, wie das Prinzip funktioniert. Es ging ihm nämlich um den interessanten Effekt, den eine Umkehrung des Umkehrungskanons erzeugt: Es entsteht ein zeitversetzter Kanon als zweite Auflösung des doppelten Kontrapunkts. Beide Kanons überlagern sich offensichtlich zu einem Zirkelkanon (streiche die Pausentakte in der Mitte):^{V35} Notenbeispiel 1

(6) Doppelter Kontrapunkt 5 zweite Auflösung (verbal erklärt):

An eigenen Kanonkompositionen lag Vicentino nicht viel. Er sagte, dass Kanons nur durch ihre kunstvolle Gestaltung bestechen, weil die Kanonstruktur die volle Harmonie und schöne Melodie behindert.^{V37} Nur eine Struktur reizte ihn zur expliziten Ausarbeitung: Er komponierte zuerst die Oberstimme bis zur Mitte, dann die Unterstimme bis zur Mitte, spiegelte dann die vertauschten Stimmen an der Mitte und verband sie zu einem Krebs-Zirkelkanon, den er einstimmig notierte; seine Kompositionsanweisung ergibt die zweistimmige Auflösung als **doppelter Kontrapunkt mit Spiegelung an einer Zeitachse**:^{V37}

(7) Doppelter Kontrapunkt 7 als Krebs-Zirkelkanon

Als Kompositionsregel gab er an: Der Schüler darf weder einen dissonanten Vorhalt setzen noch eine dissonante Zwischennote noch punktierte Noten, die rückwärts Synkopen erzeugen.^{V37} Sein Kanon hat daher gar keine Dissonanzen.

Abschließend behandelte er nur noch zwei praktische Beispiele, in denen ein **doppelter Kontrapunkt der Oktave** angewandt wird. Er nannte als Regel, keine Quinten zu setzen, da beim Oktavieren nach unten Quartan entstehen, die einen falschen Bass erzeugen. Das Problem löste er durch einen zusätzlichen passenden Bass. Beim ersten Beispiel, das dem Mangel an hohen Sopran-Männerstimmen in der damaligen Chorpraxis abhelfen sollte, kann der Sopran als Tenor gesungen werden. Beim zweiten Beispiel mit chromatischer Harmonik, die er erstmals propagierte, kann umgekehrt der Tenor als Sopran gesungen werden. Die Vertauschungen zeigen ad lib. oktavierte Violinschlüssel an:^{V38+39}

(8) **Doppelter Kontrapunkt 8** **Doppelter Kontrapunkt 9 mit chromatischer Harmonik**

(8) Sopran als Tenor oktavierbar

(8) Tenor als Sopran oktavierbar

Vicentino schrieb für Praktiker und deutete die formale Seite nur an, als er den doppelten Kontrapunkt als Art Kanon (fuga) bezeichnete. Er meinte die für den Kanon typische **Abbildungstechnik**, die auch beim doppelten Kontrapunkt stattfindet. Zuerst nannte er den Stimmtausch. Formal nummeriert dieser die Stimmen mehrstimmiger Sätze um durch eine Zahlenpermutation und ändert nur die Schicht als einziges Notenmerkmal:^{N(9)}

- (9) Ein **Stimmtausch** ist eine Schichtänderung s n -stimmiger Musikstücke mit $\text{Schicht}(s(x)) = \pi(\text{Schicht}(x))$ für eine Permutation π der Zahlen 1 bis n und Noten x . Mit $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ ergeben sich für $n=3$ folgende Fälle:

Permutation π	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
Stimmtausch π	A B C	A C B	B A C	C A B	B C A	C B A

Ein Stimmtausch allein ist musikalisch wirkungslos. Vicentino verknüpfte ihn stets mit anderen Abbildungen, bei denen sich die Tonlage der Stimmen verändert. Der Stimmtausch ordnet dann normalerweise die abgebildeten Stimmen der Tonlage nach von oben nach unten: Sopran, Alt, Tenor, Bass. Den Wechsel der Tonlage bewirken Tonhöhenänderungen, die mit einem **Intervalloperator**, der auf Töne wirkt und bei Pausen wirkungslos ist, präzisiert werden können:

- (10) Für Noten $x = [x_1, \dots, x_n]$ laut $N(3)$ und Intervalle i wird definiert:

$x+i := [x_1, x_2+i, \dots, x_n]$, falls x ein Ton mit Tonhöhe x_2 laut $N(3)$ ist,

$x+i := x$, falls x eine Pause ist, und $x-i := x+(-x)$.

Offenbar gilt: $(x+i)+j = x+(i+j)$

$$x+i+j = x+j+i$$

Ferner gilt:¹ $(x+i)-(y+i) = x-y$

$$\text{Tonhöhe}(x+i) = \text{Tonhöhe}(x) + i$$

$$\mu(x+i) = \mu(x) \text{ für andere Notenmerkmale } \mu$$

assoziativer Operator

kommutativer Operator

intervalltreuer

Tonhöhenoperator

¹ Mit Definitionen (10) und Intervalldefinitionen $Kp(1)$ gilt mit Abkürzung $Tx := \text{Tonhöhe}(x)$:
 $T(x+i) = T[x_1, x_2+i, \dots, x_n] = x_2+i = T[x_1, x_2, \dots, x_n] + i = Tx + i$. Für Noten gilt $(x+i)-(y+i) = T(x+i) - T(y+i) = Tx+i - (Ty+i) = Tx - Ty = x-y$; für Pausen x gilt $(x+i)-(y+i) = x-(y+i) = 0 = x-y$, für Pausen y ebenso $(x+i)-(y+i) = (x+i)-y = 0 = x-y$.

Oktavtranspositionen wie in (8) sind Spezialfälle eines bereits definierten Abbildungstyps, die per Intervalloperator genauer bestimmt werden:

- (11) Als ***i*-Transposition** oder **Transposition um *i*** für ein Intervall *i* gilt die durch $\tau_i(x) := x+i$ definierte Abbildung τ_i . Sie ist wegen (10) eine intervalltreue Transposition laut $Kp(3)$.

Für Notenmengen *A* gilt: $\tau_i(A) := A+i := \{x+i | x \in A\}$ und $A-i := \{x-i | x \in A\}$.

Der doppelte Kontrapunkt (1) nutzt eine nicht-intervalltreue, aber vorzeichen-treue Transposition der Melodie (von phrygisch nach mixolydisch) und addiert eine große oder kleine Unterdezime. Die Tonhöhenänderung variiert hier also punktuell ein wenig. Prinzipiell kann jeder Ton in Musikstücken die Tonhöhe frei ändern, denn das addierte Intervall ist für jeden Ton einzeln berechenbar:

- (12) Für Tonhöhenänderungen *f* des Musikstücks *M* mit schlichten Noten *x* gilt:²
- | | |
|--|---------------------------|
| $f(x) = x + (f(x) - x)$ und speziell $f(x) = x$ für Pausen <i>x</i>
$f(AB) = f(A)f(B)$ für Sätze <i>AB</i> und $f\left(\begin{smallmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix} f(S_1) \\ \vdots \\ f(S_n) \end{smallmatrix}$ für Sätze $\begin{smallmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{smallmatrix}$
$f^*(f(x)) := f(x) + (x - f(x))$ definiert inverse Tonhöhen-
änderung f^* des Musikstücks <i>f(M)</i> mit $f^*(f(x)) = x$. | <i>punktuell isomorph</i> |
|--|---------------------------|

Mit punktuellen Tonhöhenänderungen sind nicht-intervalltreue Transpositionen mit alterierten Tönen ebenfalls genau bestimmbar. Allerdings werden nur vorzeichen-treue Transpositionen eindeutig symbolisiert:

- (13) Als ***n*-Transposition** gilt eine Tonhöhenänderung *f* laut (12), bei der $f(x) - x$ aus der Stufe *n* ist. Es gilt: *f* ist eine intervallstufentreue Transposition laut $Kp(3)$; die inverse Abbildung f^* ist eine $-n$ -Transposition.³

Die vorzeichen-treue *n*-Transposition ist eindeutig bestimmt und wird als τ_n notiert, wobei *n* kein Intervall angibt, sondern einen Stufe.

Alterierte *n*-Transpositionen (modulo #) zeigt $\tau_{n\#}$ näherungsweise an. ^{$Kp(3)$}

² Für Tonhöhenänderung *f* und Pausen *x* gilt stets $f(x) = [x_1, \dots, x_n] = x$ und nach $Kp(1)$ folglich $f(x) = x = x+0 = x+(f(x)-x)$. Nach $Kp(1)$ gilt dann $f^*(f(x)) := f(x) + (x - f(x)) = f(x) + 0 = x$.
 Für schlichte Ton-Noten *x* gilt laut $N(3)(7)(9)$ stets $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ mit $\text{Tonhöhe}(x) = x_2$, wegen der Merkmal-treue gilt dann $f(x) = [x_1, \text{Tonhöhe}(f(x)), x_3, x_4]$ und somit
 $f(x) = [x_1, x_2 + (\text{Tonhöhe}(f(x)) - \text{Tonhöhe}(x)), x_3, x_4] = [x_1, x_2 + (f(x) - x), x_3, x_4] = x + (f(x) - x)$. Es gilt dann $f^*(f(x)) := f(x) + (x - f(x)) = (x + (f(x) - x)) + (x - f(x)) = x + (f(x) - x) - (f(x) - x) = x$.
 $f: M \rightarrow f(M)$ ist bijektiv, da *f* alle Noten von *M* auf alle Noten *f(M)* eindeutig abbildet, denn laut $N(7)$ ist die *p*-te Note der *q*-ten Stimme $v_{p[q]} = v_{x_3[x_4]}$ bei *M* und analog bei *f(M)*. *f* ist positions- und schicht-treu, so dass die Isomorphiebedingungen gelten.

³ Sei $(f(x) - x) \in \text{Stufe } n$ und $(f(y) - y) \in \text{Stufe } n$; mit *stufengleich* $H(16)$ und Def $H(16)$ folgt dann [1] $\text{Stufe}(f(x) - x) = \text{Stufe } n = \text{Stufe}(f(y) - y)$. Per *Stufendifferenz-summe* $H(16)$ und [1] folgt $\text{Stufe}(f(x) - f(y)) = \text{Stufe}((f(x) - x) - (f(y) - y) + x - y) = \text{Stufe}(f(x) - x) - \text{Stufe}(f(y) - y) + \text{Stufe}(x - y) = \text{Stufe } n - \text{Stufe } n + \text{Stufe}(x - y) = \text{Stufe}(x - y)$.

Da *f* bijektiv ist, gibt es *x* mit $x = f(y)$. Also [2] $f^*(x) - x = f^*(f(y)) - f(y) = y - f(y) = -(f(y) - y)$. Wegen $(f(y) - y) \in \text{Stufe } n$ gilt $\text{Stufe}(f(y) - y) = \text{Stufe } n$ und $-\text{Stufe}(f(y) - y) = -\text{Stufe } n$ und $\text{Stufe}(-(f(y) - y)) = \text{Stufe } -n$ und $-(f(y) - y) \in \text{Stufe } -n$ und mit [2] $(f^*(x) - x) \in \text{Stufe } -n$.

Transpositionen werden in schematisch dargestellten Sätzen abgekürzt durch die hochgestellte Stufe, wobei Alterationen einzelner Töne vernachlässigt werden:

(14) Für Notenmengen A und Stufen n gelten folgende Kurzschreibweisen:

$A^n := \tau_n(A)$, auch als Repräsentant für Transpositionen $\tau_{n\#}(A)$

$A' := A^8$ für Oktavtransposition (intervalltreu)

$\underline{A} := A^{-8}$ für Unteroktavtransposition (intervalltreu)

$A^{n'} := A^{n+7}$ für Oktavierungen mit Rechenregeln laut $H(17)$

punktuell isomorph wird auf Transpositionen übertragen durch:

$$[AB]^n := A^n B^n \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix}^n := \begin{bmatrix} S_1^n \\ \vdots \\ S_m^n \end{bmatrix}$$

Auch Umkehrungen in den Kontrapunkten (5)ff sind Tonhöhenänderungen. Sie haben nichts zu tun mit Dreiklangsumkehrungen, die Akkordformen permutieren.^{Kp(14)} Sie kehren vielmehr die Richtung der Intervallstufen um:

(15) Als **Umkehrung** gilt eine Tonhöhenänderung U von Musikstücken laut (12), bei der $U(x)-U(y)$ aus der Stufe $(y-x)$ ist. In Schemata gilt die Abkürzung $-A := U(A)$ für Notenmengen A des Musikstücks, für das U definiert ist.

Die inverse Tonhöhenänderung U^* mit $U^*(U(x))=x$ ist eine Umkehrung.⁴

Die inverse Umkehrung, die eine Umkehrung rückgängig macht, ist verwandt mit einer Spiegelung, die sich selbst rückgängig macht:

(16) Eine **Spiegelung** ist eine selbstinverse Abbildung f mit $f(f(x))=x$.

Exakte Umkehrungen wie (4) werden punktuell präzise beschreiben als Spiegelung an einer Tonhöhenachse (unabhängig vom gewählten Musikstück):

(17) Die Abbildung U_α mit $U_\alpha(x) := x+2(\alpha-\text{Tonhöhe}(x))$ für eine Tonhöhe α gilt als **Umkehrung um die Achse α** . Ihre Alterierungen (modulo $\#$) zeigt $U_{\alpha\#}$ näherungsweise an.^{Kp(3)}

Eine Tonhöhenänderung U mit $U(x)-U(y)=y-x$ gilt als **exakte Umkehrung**. $\alpha := \frac{1}{2}(\text{Tonhöhe}(x)+\text{Tonhöhe}(U(x)))$ definiert ihre Achse.

Es gilt: Exakte Umkehrungen U sind Spiegelungen mit $U(U(x))=x$; mit der Definition von α , die unabhängig von der Wahl des Tones x ist, gilt $U=U_\alpha$. U_α ist eine exakte Umkehrung mit Fixtönen $U_\alpha(x)=x \Leftrightarrow \text{Tonhöhe}(x)=\alpha$. Eingeschränkt auf ein Musikstück ist es eine Umkehrung laut (15).⁵

⁴ Da U bijektiv ist, gibt es a, b mit $x=U(a)$ und $y=U(b)$. Also gilt mit (12): $[1] U^*(x)-U^*(y) = U^*(U(a))-U^*(U(b)) = a-b$. Ferner $(U(b)-U(a)) \in \text{Stufe}(a-b)$, also $(y-x) \in \text{Stufe}(a-b)$, wegen *stufengleich* $H(16)$ gilt dann $\text{Stufe}(y-x)=\text{Stufe}(a-b)$ und $(a-b) \in \text{Stufe}(y-x)$ und mit [1] somit $U^*(x)-U^*(y) \in \text{Stufe}(y-x)$, und U^* ist die inverse Umkehrung.

⁵ Kürze ab $Tx := \text{Tonhöhe}(x)$. Offenbar $U_\alpha(x)=x \Leftrightarrow 2(\alpha-Tx)=0 \Leftrightarrow Tx=\alpha$. Ferner gilt $U_\alpha(x)-U_\alpha(y) = TU_\alpha(x)-TU_\alpha(y) = Tx+2(\alpha-Tx)-(Ty+2(\alpha-Ty)) = Ty-Tx = y-x$. Mit (12) ergibt sich: $U(U(x)) = U(x)+(U(U(x))-U(x)) = U(x)+(x-U(x)) = U^*(U(x)) = x$. Aus $U(x)-U(y)=y-x$ folgt $U(x)-U(y)=Ty-Tx$ und daraus $Tx+TU(x)=Ty+TU(y)$, daher ist die Definition von α unabhängig von der Wahl von x . Aus ihr folgt $TU(x)=2\alpha-Tx$ und damit $U(x) = x+(U(x)-x) = x+(TU(x)-Tx) = x+(2\alpha-Tx-Tx) = x+2(\alpha-Tx) = U_\alpha(x)$.

Das arithmetische Mittel zweier Tonhöhen ergibt die Achse. Sie ist imaginär, wenn die Tonhöhensumme im Stufensystem nicht halbierbar ist; das ist wegen der archaischen Zählweise^{H(17)} der Fall bei geraden Stufen!⁶ Nur bei ungeraden Stufen liegt die Achse auf einer Stufe. Die Achsen-Definition (17) passt auch auf alterierte Umkehrungen zum frühesten Ton der ersten Stimme; bei anderen Tönen kann die Achse alteriert sein:

(18)	Umkehrungsbeispiel	Typ	$x \rightarrow U(x)$	Tonhöhensumme 2α	Achse α
(4)	$A \rightarrow -A$	exakt	$g \rightarrow a$	$g+a \in \text{Stufe } 10$	$g^{+1/2}\text{Ton imaginär}^6$
(5)	$\begin{matrix} A \rightarrow -B \\ B \rightarrow -A \end{matrix}$	inexakt	$c' \rightarrow d'$	$c'+d' \in \text{Stufe } 16$	$c'^{+1/2}\text{Ton imaginär}^6$
(6)	Schema (21) ₍₆₎	inexakt	$a' \rightarrow c$	$a'+c \in \text{Stufe } 15$	h

Der Krebs ist eine Spiegelung an einer Zeitachse. Bei ihm wird die Tonfolge rückwärts gelesen. Das erreicht eine Neuberechnung der Notenposition:^{N(4)(7)}

(19) Als **Krebs** gilt eine Positionsänderung K eines Musikstücks M , für dessen Noten x gilt: $\text{Position}(K(x)) = \text{Länge}(M) - \text{Ende}(x)$.

Es gelten die Krebseigenschaften $K(AB) = K(B)K(A)$ und $K(l_1 \dots l_n) = l_n \dots l_1$ für Notenfolgen. Ferner ist der Krebs eine Spiegelung mit $K(K(x)) = x$.⁷

Zeitversetzungen durch vorgeschaltete Pausen betten einen Satz in einen Satz mit mehr Noten ein. Das Bild des Satzes ist daher nur ein Teil, der nicht mehr als selbständiger Satz notiert werden kann! In Notenbeispielen (2) (3) (6) (4) ist dieser versetzte Teil jedoch direkt sichtbar. Die Position der Noten verändert sich dort, indem die Länge vorgeschalteter Pausen addiert wird:

(20) Als **Zeitversetzung** um p für eine Dauer $p > 0$ gilt eine Positionsänderung $\triangleright p$ mit $\text{Position}(\triangleright p(x)) = \text{Position}(x) + p$.

Für Musikstücke A, P mit $p = \text{Länge}(P)$ gilt $PA = P \circ \triangleright p(A)$; das heißt: Die Zeitversetzung $\triangleright p(A)$ ist Teil von PA . P kann aus lauter Pausen bestehen.

⁶ Die Achsen $c'^{+1/2}\text{Ton}$ bzw. $g^{+1/2}\text{Ton}$ sind in der Notenschrift imaginär und liegen zwischen cis' und des' bzw. gis und as ; auf dem zwölfstufig temperierten Klavier dagegen fallen diese Töne zusammen: $c'^{+1/2}\text{Ton} = cis' = des'$ bzw. $g^{+1/2}\text{Ton} = gis = as$.

⁷ Sei $l_1 \dots l_n$ die Notenfolge zu einer Stimme von M . $s_i := l_{n-i+1}$ erzeugt, da $s_1 = l_n$ und $s_n = l_1$ [1], die gespiegelte Folge $s_1 \dots s_n = l_n \dots l_1$ mit $l_i = l_{n-(n-i+1)+1} = s_{n-i+1}$ [2] und $l_{i+1} = l_{n-(n-i)+1} = s_{n-i}$ [3]. Kürze ab $D := \text{Dauer}$, $P := \text{Position in } K(M)$, $Q := \text{Position in } M$. Laut N(6) gilt auch $\text{Länge}(M) = D(l_1) + \dots + D(l_n)$ und laut N(4) $\text{Ende}(l_i) = D(l_1) + \dots + D(l_i)$ also per Definition $P(K(l_i)) = D(l_1) + \dots + D(l_n) - (D(l_1) + \dots + D(l_i))$. Für $i = n$ ist das laut [1] $P(K(l_i)) = P(K(l_n)) = 0 = P(s_1) = P(s_{n-n+1}) = P(s_{n-i+1})$ und für $i < n$ $P(K(l_i)) = D(l_{i+1}) + \dots + D(l_n)$, also mit [1][3] monoton geordnet $P(K(l_i)) = D(s_1) + \dots + D(s_{n-i})$ und somit per N(4) ebenfalls $P(K(l_i)) = P(s_{n-i+1})$. Da der Krebs als Positionsänderung ansonsten merkmaltreu ist, gilt für zugehörige Noten in M offenbar mit [2] $K(l_{i[Q(l_i)]}) = s_{n-i+1[P(s_{n-i+1})]}$ und somit für die Notenfolge $K(l_1 \dots l_n) = s_1 \dots s_n = l_n \dots l_1$. Durch Zerlegung erhält man offenbar $K(AB) = K(B)K(A)$.

Der Beweis läuft symmetrisch, wenn man stets s und l vertauscht und ebenso Q und P und ergibt $K(s_{i[P(s_i)]}) = l_{n-i+1[Q(l_{n-i+1})]}$ und somit nach Substitution von i durch $n-i+1$ die Spiegelung $K(K(l_{i[Q(l_i)]})) = K(s_{n-i+1[P(s_{n-i+1})]}) = l_{i[Q(l_i)]}$.

Schematisch dargestellte Sätze nutzen die Zusammensetzung, bei der synchrone Teile übereinanderstehen. Das Musikstück wird in gleichlange Blöcke zerlegt und eventuelle Bindungen werden vernachlässigt. Pausen erscheinen als gleichlange Lücken. Freie Teile werden als ... notiert. Schemata zu Vicentinos doppelten Kontrapunkten mit Zeitversetzung sehen dann so aus:

- (21) Beispiel (2): doppelter Zeitversetzungskontrapunkt (**Cantus-firmus rot**)
+ doppelter Kontrapunkt der Dezime als Parallelkanon:

$$\begin{array}{ccccc} ABCDEFGHIJ & \rightarrow & \text{abc defghij} & \rightarrow & \text{abc defghij} \\ \text{abc defghij} & & [ABCDEFGHI]^{-8} & & [ABCDEFGHI]^{-8} \end{array}$$

Beispiel (3)₁: Oktavkanon = Vereinigung des doppelten Kontrapunkts der oktavierten Zeitversetzung

$$\begin{array}{ccccc} A'B'C'D'E'F'G'H' \dots & & & & \\ ABCDEFGH \dots & \rightarrow & ABCDEFGH & \rightarrow & A'B'C'D'E'F'G'H' \\ \text{abc defgh} \dots & & \text{abc defgh} & & \text{abc defgh} \end{array}$$

Beispiel (6): Umkehrungskanon im doppelten Umkehrungskontrapunkt erzeugt einen doppelten Zeitversetzungskontrapunkt

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} -A-B \\ a \ b \\ c \ d \\ A \ B \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} -A-B \\ a \ b \\ c \ d \\ A \ B \end{array} & \text{Vereinigung als Zirkelkanon:} & \begin{array}{c} -A-B-A-B \\ a \ b \ a \ b \\ c \ d \ c \ d \\ A \ B \ A \ B \end{array} \end{array}$$

Vicentino nannte keine Regeln für Zeitversetzungen, da sie die Synchronizität zerstören und neue schwer kalkulierbare harmonische Bezüge erzeugen. Gut berechenbar sind nur doppelte Kontrapunkte mit synchronen Abbildungen, am ehesten solche, bei denen Konsonanzen konsonant bleiben:

- (22) Als **synchron** gilt eine Abbildung κ , wenn Töne x und y genau dann simultan sind, wenn auch $\kappa(x)$ und $\kappa(y)$ simultan sind. Solch eine Abbildung gilt als **konsonanztreu**, falls für jede Konsonanz x – y simultaner Töne x und y auch $\kappa(x)$ – $\kappa(y)$ eine Konsonanz ist.

A gilt als **doppelter κ -Kontrapunkt**, falls A und $\kappa(A)$ Kontrapunkte sind zur synchronen Abbildung κ .

Positions- und dauerntreue Abbildungen sind synchron, insbesondere Tonhöhenänderungen und der Krebs. Intervalltreue synchrone Abbildungen sind konsonanztreu, speziell intervalltreue Transpositionen und der Krebs. Exakte Umkehrungen sind nicht intervalltreu, aber dennoch konsonanztreu.

Vicentinos **Regel für den doppelten Krebs-Kontrapunkt** war das Dissonanzverbot, also ein total konsonanter Satz (7). Seine Lösungsstrategie funktioniert, da der Krebs konsonanztreu ist:

- (23) Jeder Kontrapunkt Note gegen Note ist ein doppelter Krebs-Kontrapunkt.

Zum Dissonanzverbot zwingt allerdings nur ein Stil, der nur unbetonte reguläre Durchgänge und Wechselnoten und klassische Vorhalte erlaubt:^{Kp(17)} Sie erzeugen im Krebs betonte irreguläre Durchgänge und Wechselnoten oder Antizipationen, die erst im Barock üblich wurden.^{Kp(28)} Der freiere Stil erlaubt belie-

bige Durchgänge, Wechselnoten und Vorhalte, etwa im Krebskanon aus Bachs *Musikalischem Opfer*. Er hat dasselbe Schema wie Vicentinos Krebskanon:

(24) Doppelter Krebs-Kontrapunkt: zugehöriger Krebszirkelkanon (7):

$$\begin{array}{c} B \\ C \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} C \\ B \end{array} \text{ mit } B := K(B) \text{ und } C := K(C) \quad \quad \quad | : \begin{array}{c} B \\ C \end{array} : | \text{ mit } CB = K(BC)$$

Konsonanztreue Umkehrungen ändern nur die Intervallrichtung, aber nicht den Rhythmus und die Betonung; Durchgänge wie in Vicentinos Beispiel (5) sind also legal, ebenso Wechselnoten. Er nannte darum wohl keine einschränkenden **Regeln für den doppelten Umkehrungs-Kontrapunkt**. Solche sind aber im strengen Stil fällig. Kurz nach Vicentino ergänzte sein Kollege Gioseffo Zarlino solche in *Le Istitutioni harmoniche* 1558 [Z]: Er verlangte, dass alle Synkopen konsonant sind und der Tenor zum Sopran keine Quarte bildet.^{Z232} Damit schloss er dissonante klassische Vorhalte nach unten aus, da sie Vorhalte nach oben erzeugen, die er noch nicht erlaubte. Der Barockstil mit freien Fortschreitungen *Kp*(28) erlaubt sie, sichtbar an den Spiegelfugen *Contrapunctus 12* und *Contrapunctus 13* in Bachs *Kunst der Fuge*. Statt des Verbots von Quartan zum Sopran genügt eine schwächere Regel: Bildet ein Ton oder höchster Ton im Akkord eine Quarte, dann ist einer von ihnen wie eine Dissonanz zu behandeln, sonst erzeugt die Umkehrung eine falsche Quarte zum Basston. Dazu ist die einfache Kontrapunktdefinition nur geringfügig einzuschränken:

(25) Jeder Kontrapunkt, der in der Reduktion laut *Kp*(26) nicht nur Quartakkorde, sondern auch Umkehrungen von Quartakkorden meidet, ist ein doppelter Umkehrungskontrapunkt.

Transpositionen erzeugen **triviale doppelte Kontrapunkte**, die das harmonische Gefüge nicht wesentlich verändern. Das tun auch für andere harmonisch triviale Abbildungen beim Anwenden auf Kontrapunkte:

(26) Stimmtausch, intervalltreue Transposition, Zeitversetzungen, Vergrößerungen und Verkleinerungen^{N(10)} sind intervalltreu und somit auch konsonanztreu. Sie bilden Kontrapunkte stets automatisch auf Kontrapunkte ab.

Wenn Stimmen sich nicht kreuzen, kann ihr Abstand durch Oktavierung der Oberstimme ausgedehnt werden.^{Z230f} Solch eine Dehnung ist nur eine partielle Transposition. Sie ist aber konsonanztreu und erzeugt keine neue Harmonie. Bei Stimmkreuzungen ist es allerdings anders wegen der Sonderrolle der Quarte. Man unterscheidet beide Fälle mit Intervallen simultaner Töne:

(27) Gilt für simultane Töne a aus A und b aus B stets $a-b \geq 0$, so liegt A **über** B und B **unter** A . A **kreuzt** B , falls weder A über B noch B über A liegt.

Als **Oktavdehnung** gilt die Abbildung, die einen Satz $\frac{A}{B}$ auf $\frac{A^8}{B}$ abbildet. Ist $\frac{A}{B}$ ein Kontrapunkt mit A über B , so ist auch dessen Oktavdehnung ein Kontrapunkt mit A^8 über B . Oktavdehnungen sind mehrfach anwendbar.

Andere partielle Transpositionen können gewisse Konsonanzen zerstören. Vicentino transponierte einmal die Oberstimme nach unten, ein anderes Mal die Unterstimme nach oben. Beide Fälle laufen prinzipiell auf denselben Kontrapunkt hinaus, wie eine Transposition der abgebildeten Stimmpaare zeigt:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \text{Beispiel (1)} & \text{Beispiel (2)}_{2+3} & \text{Beispiel (8)}_1 & \text{Beispiel (8)}_2 \\
 \hline
 \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A^{-10} \end{array} & \begin{array}{l} A \rightarrow B^{10} \\ B \rightarrow A = [B^{10}]^{10} \end{array} & \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow A^{-8} \\ D \rightarrow D \end{array} & \begin{array}{l} A \rightarrow C^8 \\ B \rightarrow A \\ C \rightarrow B \\ D \rightarrow D \end{array} \\
 \hline
 & & & C^8 = [C^8] \\
 & & & A = [A^{-8}]
 \end{array}$$

(1) (8)₂ haben keine Stimmkreuzung, (2)₂₊₃ (8)₁ haben Stimmkreuzungen.

Zur Präzisierung doppelter Kontrapunkte mit partieller Transposition genügt der einfachste Fall, aus dem sich Varianten durch Transposition errechnen:

(29) Als **doppelter Kontrapunkt der Stufe n** oder kurz **n -Kontrapunkt** gilt ein Kontrapunkt $\frac{A}{B}$, falls auch $\frac{B^n}{A}$ ein Kontrapunkt ist.

Zwischen gekreuzten Stimmen gibt es positive und negative Intervalle. Der negative Kreuzungsbereich ist in folgender Skala grau unterlegt. Konsonanzen mit verbotenen Parallelen sind mit $\neq$ markiert. Rot gefärbt sind Dissonanzen und Ausrufezeichen, die eventuelle Quart-Dissonanzbehandlungen anmahnen:

(30)

$a-b$	-6	-5 $\neq$	-4!	-3	-2	1 $\neq$	2	3	4!	5 $\neq$	6	7	8 $\neq$	9	10	11!	12 $\neq$	13	14	15 $\neq$
														2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'

Bei doppelten Kontrapunkten ist eine zweite Skala in umgekehrter Richtung nötig für die Konsonanz- und Dissonanzverhältnisse nach dem Stimmtausch mit partieller Transposition. Sie überlagern sich dann so, dass die Intervallstufen und deren Bilder übereinander stehen. Solche gegenläufige Skalen in der schlichten Form $\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}$ gab Berardi 1681 an.^{B147}

Regeln für den doppelten Kontrapunkt der Oktave erfassen zwei erweiterte gegenläufige Skalen mit ergänzten Daten für Parallelen und Dissonanzen:

(31)

doppelter Kontrapunkt der Oktave: Intervallstufen																				
① $a-b$	-6	-5 $\neq$	-4!	-3	-2	1 $\neq$	2	3	4!	5 $\neq$	6	7	8 $\neq$	9	10	11!	12 $\neq$	13	14	15 $\neq$
② b^8-a	13	12 $\neq$	11!	10	9	8 $\neq$	7	6	5 $\neq$	4!	3	2	1	-2	-3	-4!	-5 $\neq$	-6	-7	-8 $\neq$
①+②	-6	-5 $\neq$	-4!	-3	-2	1 $\neq$	2	3	4! $\neq$	5! $\neq$	6	7	8 $\neq$	2'	3'	4'	5' $\neq$	6'	7'	8' $\neq$

Im Kreuzungsbereich passiert hier nichts. Im ungekreuzten Bereich dagegen sind zwei Regeln zu beachten: ein Quartparallelenverbot, das Vicentino vergaß, und die Dissonanzbehandlung von Quinten, die in der Auflösung Quartan zum Basston werden. Er verbot daher kurzerhand Quinten,^{V38} benutzte sie natürlich legal in Sätzen mit freiem Bass (8). Bei Vertauschungen von $\frac{A}{B}$ zu $\frac{B^8}{A^{-8}}$ gelten analoge **Regeln für Doppeloktav-Kontrapunkt**, die nur Quartan und Quinten auch auf deren Oktavierungen (Undezimen und Duodezimen) ausdehnen, da sich der ungekreuzte Bereich um eine Oktave vergrößert, eventuell auch nur per Oktavdehnung. Eine Tabelle erübrigt sich hier.

Bei den **Regeln für den doppelten Kontrapunkt der Dezime** werden beide gegenläufigen Skalen etwas verschoben und sehen so aus:

(32)

	doppelter Kontrapunkt der Dezime: Intervallstufen																			
① $a-b$	-6	-5 _≠	-4!	-3	-2	1 _≠	2	3	4!	5 _≠	6	7	8 _≠	9	10	11!	12 _≠	13	14	15 _≠
② $b^{10}-a$	15 _≠	14	13	12 _≠	11!	10	9	8 _≠	7	6	5 _≠	4!	3	2	1 _≠	-2	-3	-4!	-5 _≠	-6
①+②	-6 _≠	-5 _≠	-4!	-3 _≠	-2	1 _≠	2	3 _≠	4	5 _≠	6 _≠	7	8 _≠	2'	3' _≠	4'	5' _≠	6'!	7'	8' _≠

Vicentinos Verbot von Terz- und Sextparallelen,^{V34} die Oktav- und Quintparallelen erzeugen, ist ablesbar im ungekreuzten Skalenbereich [1 bis 10]. Nötig ist auch die Dissonanzbehandlung der Quarte, die er nicht besprach. Das versäumte auch Zarlino, obwohl er stets genauere Kompositionsregeln angab.^{Z231} Er kalkulierte den Kreuzungsbereich bis zur Unterterz oder Duodezime ein, denn er sah, dass es darüber hinaus kompliziert und unregelmäßig wird, da die Tredezime (oktavierte Sexte) in der zweiten Auflösung kritisch ist. Auch die Unterquinte wäre dissonant. In seinem Beispiel nutzte er eine Dezime+Oktave-Transposition, also die Oktavdehnung (27), die den problemlosen Bewegungsraum der Melodie (fett umrahmt) um eine Oktave vergrößert. Ausdrücklich erwähnte er auch die dreistimmige Erweiterung durch eine Dezimparallele, die Vicentino nur vage andeutete im zweiten Beispiel (2)₃. Weitere Regeln Zarlinos sind nicht zwingend: Nur konsonante Synkopen zu benutzen,^{Z231} was dissonante Vorhalte ausschließt, ist hier nicht notwendig.

Vicentino diskutierte doppelte Kontrapunkte anderer Stufen nicht. Allgemein tat dies erst Marpurg 1753 nach Bachs Tod.^{M161-192} Aber schwierige doppelte Kontrapunkte der None oder Septime, die er breit behandelte,^{M170-177,191f} spielten in der Musikpraxis keine Rolle. Nur einer, den Vicentino nicht erwähnte, wurde bedeutsam: der doppelte Kontrapunkt der Duodezime. Zarlino setzte ihn an die erste Stelle, und zwar mit einer intervalltreuen Transposition.^{Z229} Er schloss den Kreuzungsbereich aus, da sich darüber hinaus Dissonanzen häufen, wie die **Regeln für den doppelten Kontrapunkt der Duodezime** in den gegenläufigen Skalen widerspiegeln:

(33)

doppelter Kontrapunkt der Duodezime: Intervallstufen																			
① $a-b$	-5 _≠	-4!	-3	-2	1 _≠	2	3	4!	5 _≠	6	7	8 _≠	9	10	11!	12 _≠	13	14	15 _≠
② $b^{12}-a$	16	15	14	13	12 _≠	11!	10	9	8 _≠	7	6	5 _≠	4!	3	2	1 _≠	-2	-3	-4
①+②	-5 _≠	-4!	-3	-2	1 _≠	2	3	4	5 _≠	6	7	8 _≠	2'	3'	4'	5' _≠	6'	7'	8' _≠

Ausdrücklich nannte er das Verbot konsonanter Sexten, das abzulesen ist. Zu ergänzen ist die zwingende Dissonanzführung von Quartan. Wieder erlaubte er die Oktavdehnung (27) als Duodezime+Oktave-Transposition. Selbstverständlich ist auch eine nicht-intervalltreue Duodezim-Transposition möglich. Das älteste bekannte Beispiel dazu ist ein Kanon von Landini aus dem 14. Jahrhundert, bei dem die um einen Takt versetzten Stimmen 2+3 zu 1+3 im doppelten Kontrapunkt der Duodezime stehen:

(34) Doppelter Kontrapunkt der Duodezime: Francesco Landini (1325-1397): Ritornello aus: Deh Dimmi tu

Offenbar galt im 14. Jahrhundert das Parallelenverbot noch nicht: In Takt 3+8 stehen Oktavparallelen, die in Takt 4+9 zu Quintparallelen werden. Die übrigen Kontrapunktregeln erfüllte Landini jedoch, wie man leicht nachprüft.

Kunstvollere Anwendungen dieser kontrapunktischen Techniken gibt es wieder in Bachs *Kunst der Fuge: Contrapunctus 16+17* sind Kanons im doppelten Kontrapunkt der Dezime oder Duodezime: *Contrapunctus 9* ist eine Doppelfuge mit zwei Themen im Duodezim-Kontrapunkt. *Contrapunctus 10* ist eine Doppelfuge mit zwei Themen im Dezim-Kontrapunkt, die auch in dreistimmigen Parallelkanons geführt werden. ^{Takt 75, 85, 103, 115}

Zarlino kombinierte die drei Doppelkontrapunkte der Duodezime, Dezime und exakten Umkehrung in einem mehrfachen Kontrapunkt ohne Parallelen, ohne Vorhalte und ohne konsonante Sexten und nannte auch dreistimmige Parallelkanon-Auflösungen;²²³ vierstimmige Auflösungen, die ebenfalls möglich sind, übersah er:

(35)	A	B ⁸	B ⁸	-B	B ¹⁰	A ⁶	B ⁸	-A ¹⁰	theoretisch auch möglich:	B ¹⁰	-A ¹⁰
	B	A ⁻⁵	A ⁻¹⁰	-A	A	B ⁸	A ⁻³	-B		A	-B
					B	A ⁻⁵	A ⁻¹⁰	-A		B	-A
										A ⁻¹⁰	-B ⁻¹⁰

Die beiden vierstimmigen Auflösungen vereinigt der Kontrapunkt im Titelbild: Es ist ein symmetrischer achtfacher Kontrapunkt, den Vicentinos Spiegelungen aus einem Tetrachord erzeugen. Die Symmetrie ist optisch direkt erkennbar: Jedes Notensystem stellt eine Untergruppe mit zwei Spiegelachsen dar: dem Taktstrich und der Tonhöhe a im unteren System und cis' im oberen System. Beide Notensysteme sind spiegelsymmetrisch bezüglich der imaginären Achse $e^{+1/2}\text{Ton}$ und erzeugen Dezimparallelen. Die Krebs-Symmetrie erzeugt eine Kadenz, die einen Dominantseptnonakkord aufbaut und wieder auflöst.

Eine historische Anwendung kombinierter Kontrapunkte ist wieder bei Bach zu finden: Im *Wohltemperierten Klavier* II baute er die *Fuge 16 g-moll* auf einem doppelten Kontrapunkt der Duodezime und Dezime auf und wandte auch drei- und vierstimmige Auflösungen mit Parallelen an. 

Bei Zarlino fehlt von Vicentinos doppelten Kontrapunkten sowohl der Krebs als auch der doppelte Kontrapunkt der Oktave. Letzter ist in mehrstimmigen Sätzen häufig und trivial, weil nur Quartparallelen zu meiden sind. Komplizierter wird erst ein mehrstimmiger Satz für gemischte vertauschbare Stimmen, also ein **mehrfacher Kontrapunkt der Oktave**. Weil hier jede Stimme im Bass stehen kann, verursachen Quinten in Dreiklängen chronische Probleme. Regelrecht komponierte Werke zu dieser Technik mit künstlerischem Anspruch findet man in der Literatur nicht, nicht einmal bei Bach: Seine vielen Permutationsfugen für Chor, die angeblich im drei- bis fünffachen Kontrapunkt der Oktave komponiert sind, halten einer genauen Analyse nicht stand: Für ihn war die Permutationsfuge keine komplexe Komposition, sondern im Gegenteil ein Schnellkompositionsverfahren, bei dem er die exakte mathematische Form ignorierte: Er fügte oft einen Instrumentalbass hinzu und änderte Stimmen an Problemstellen häufig ab.^{SN111f} Strenge Permutationen ohne Füllstimmen hat nur seine dreistimmige *Sinfonia f-moll* für Klavier. Doch gerade in dieser echten Permutationsfuge ließ er mehrere ‚falsche‘ Quarten einfach stehen. Sie fallen allerdings wegen der herben chromatischen Harmonik kaum auf. 

Auf zyklischen Permutationen bauen auch übliche Zirkelkanons auf, die es in Hülle und Fülle gibt, auch von prominenten Komponisten. Aber sie sind so gut wie immer für gleiche Stimmen komponiert, da sie meist für gesellige Anlässe geschrieben sind. Daher wandten Komponisten hier keine komplexe Kontrapunkttechnik an. Sie wäre erst erforderlich bei einem Zirkelkanon für mehrstimmigen Chor, wie am Schema eines Kanons für zwei Frauenstimmen und eine Männerstimme zu erkennen ist:

$$(36) \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A & B & C \\ A^8 & B^8 & C^8 \end{array} & \begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ A^8 & B^8 & C^8 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dreifacher Kontrapunkt} \\ B \quad B \quad B \\ A \quad A^8 \quad A^8 \end{array} = \begin{bmatrix} A \\ B^8 \end{bmatrix} \quad \text{analog für } \begin{array}{c} C \\ B \end{array} \text{ und } \begin{array}{c} C \\ A \end{array}$$

Solch ein Kanon ist mir bei der wissenschaftlichen Recherche nie begegnet. Das war der Anlass zur Komposition eines solchen Kanons im strengen kontrapunktischen Stil. Ein Korrektheitstest eliminiert Dissonanzen, und zwar separat für jedes Stimmpaar, wie es die Kontrapunktdefinition verlangt.^{Kp(17)(26)} Dissonanzen und Quarten sind korrekt als Durchgang (d), Wechselnote (w) und Vorhalt (v) geführt. Sie sind in den Noten vermerkt, wobei nebeneinanderstehende Dissonanzen sich jeweils auf zweierlei korrekte Stimmpaare beziehen. Auch verminderte Quinten (♭5) und übermäßige Quart (♯4), die schon im alten Kontrapunkt als fast konsonant galten,^{Kp(6)} lösen sich korrekt auf, was punktierte Linien anzeigen:

Kanon im dreifachen Kontrapunkt der Oktave mit kontrapunktisch-harmonischer Analyse

A

B

A

C

B

A⁻⁸

6 6 5 3 6 6 4 3 6 6 5 3 3 3 3 3 6 6 4 6 5 6 3

A

C

B⁻⁸

3 2 6 6 5 3 2 3 4 5 6 3 3 2 3 4 5 4 2 6

B

A

C⁻⁸

3 3 4 5 6 6 7 6 5 6 3 3 4 6 6 6 3 3 2 3 4 5 4 3 3

Der im eingerahmten Kasten ergänzte vollständig bezifferte Bass zeigt, dass auch im dreifachen Kontrapunkt der Oktave eine anspruchsvolle Harmonik mit vielen Dreiklängen, Septakkorden und Quartsextakkorden gestaltet werden kann. Dieser komplexe Kanon wurde schon in der [KANONKUNST](#) erwähnt mit dem zugehörigen Text:

Kanon im dreifachen Kontrapunkt der Oktave

Wilfried Neumaier 1977

1. Frauenstimme

(8) Er hat sei - nen En - geln be - foh - len, dass sie dich be - hü - ten auf

2. Frauenstimme

(8) al - len dei - nen We - gen, dass sie dich auf den Hän - den tra - gen

3. Männerstimme

(8) und du dei - nen Fuß nicht an ei - nen Stein sto - - ßest. Ps 91,11f

Fine Männer

Literatur

[K] Neumaier, W.: *Kanonkunst*, 2024.[MM] Neumaier, W.: *Musik-Mathematik kurz gefasst*, Heft 1-5:[H] *Unser harmonisches Tonsystem*, 2025[N] *Unser Noten- und Taktsystem*, 2025.[Kp] *Kontrapunkt oder Komposition*, 2025.[Dp] *Doppelter Kontrapunkt*, 2026.[KT] *Kanontechnik*, 2026.Download von [K][MM]: www.neumaier-wilfried.de/musikwissenschaft[SN] Neumaier, Sabine: *Der doppelte Kontrapunkt in den Permutationsfugen von Johann Sebastian Bach*, Tübingen 1974 (Musikwissenschaftliches Institut).

Historische Quellen

[B] Berardi, Angelo: *Ragionamenti Musicali*, Bologna 1681.<https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10598256?page=150,151>[M] Marpurg, Friedrich Wilhelm: *Abhandlung von der Fuge*, Berlin 1753.https://digital.staatsbibliothek-berlin.de/werkansicht?PPN=PPN866422935&view=overview-toc&PHYSID=PHYS_0190&DMDID=DMDLOG_0001[V] Vicentino, Nicola: *L'antica musica ridotta alla moderna prattica*, Rom 1555, Buch IV,zitiert nach Kapiteln. [https://imslp.org/](https://imslp.org/index.php?title=L%27antica_musica_ridotta_alla_moderna_prattica_(Vicentino,_Nicola)&oldid=3307859)[index.php?title=L%27antica_musica_ridotta_alla_moderna_prattica_\(Vicentino,_Nicola\)&oldid=3307859](https://imslp.org/index.php?title=L%27antica_musica_ridotta_alla_moderna_prattica_(Vicentino,_Nicola)&oldid=3307859)[Z] Zarlino, Gioseffo: *Le Istitutioni harmoniche*, 1558, Teil III, zitiert nach Seitenzahlen.<https://docnum.unistra.fr/digital/collection/coll10/id/1052>

Titelbild: Achtfacher Kontrapunkt durch Vicentino-Spiegelungen erzeugt. Optisch erkennbare Symmetrie: Diedergruppe D_2 oder Kleinsche Vierergruppe; jedes Notensystem für sich hat ebenfalls diese Symmetrie.

Update Oktober 2026